Lycée Fénelon
Année 2021-2022

BCPST1

Mathématiques

Devoir surveillé n° 3

Samedi 4 décembre 2021
Durée : 3 heures 30

Qualité de la rédaction, clarté des raisonnements, présentation, orthographe et ponctuation font partie des critères de notation.
Il est vivement recommandé de lire attentivement les questions, d'*encadrer les résultats* et de signaler clairement toute question admise.
L'usage des calculatrices est ***interdit***.

Exercice 1. *Deux calculs de* $\cos(\pi/12)$ *et* $\sin(\pi/12)$

Les questions 1) et 2) sont indépendantes ; les résultats établis dans l'une ne pourront pas être utilisés dans l'autre.

Dans cet exercice on propose deux méthodes de calcul de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

1) Soit $u = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}$, $v = \dfrac{\sqrt{2}(1+i)}{2}$ et $z = \dfrac{u}{v}$.

- **a)** Écrire z sous forme algébrique.
- **b)** Écrire z sous forme exponentielle.
- **c)** En déduire les valeurs exactes de $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$.

2) Soit $z = \sqrt{2+\sqrt{3}} + i\sqrt{2-\sqrt{3}}$.

- **a)** Écrire z^2 sous forme algébrique.
- **b)** Calculer le module de z^2 et un argument de z^2.
- **c)** En déduire le module de z et un argument de z.
- **d)** En déduire les valeurs de $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$.

3) Vérifier que les valeurs trouvées de $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$ au 1) et au 2) sont bien égales.

Exercice 2. *Calculs de sommes*

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer les sommes suivantes :

$$\text{a) } \sum_{k=1}^{n} (3k-1)^2 \qquad \text{b) } \sum_{k=1}^{n} 3^{2k-1} \qquad \text{c) } \sum_{k=1}^{n} (k-1)^3$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer les sommes doubles suivantes :

$$\text{a) } \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} i \qquad \text{b) } \sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} ij \qquad \text{c) } \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=j}^{n} \frac{j^2}{i}$$

3. Soit n un entier $\geqslant 2$. Calculer les sommes suivantes par télescopage :

$$\text{a) } \sum_{k=2}^{n} \ln\left(1-\frac{1}{k}\right) \qquad \text{b) } \sum_{k=2}^{n} \ln\left(1-\frac{1}{k^2}\right) \qquad \text{c) } \sum_{k=1}^{n} k.k!$$

Exercice 3. *Utilisation des nombres complexes pour résoudre deux équations trigonométrique. Les questions 1) et 2) sont indépendantes.*

1) Soit l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$\cos(2x)\left(\sin(x)\right)^3 = -\frac{1}{8}\cos(x) - \frac{1}{2}\sin(x) + \frac{3}{8}\sin(3x) \tag{E_1}$$

a) Appliquer les formules d'Euler pour linéariser $\cos(2x)\left(\sin(x)\right)^3$.

b) En déduire que (E_1) est équivalente à l'équation $\sin(5x) = \cos(x)$.

c) Déterminer toutes les solutions de l'équation (E_1).

2) Soit l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$\sin(x) - \sin(3x) + \sin(4x) = 0 \tag{E_2}$$

a) Justifier que $\sin(4x) - \sin(3x) = Im\left(e^{i4x} - e^{i3x}\right)$.

b) Appliquer la méthode de l'angle moitié pour montrer que :

$$\sin(4x) - \sin(3x) = 2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{7x}{2}\right)$$

c) Rappeler une formule permettant d'exprimer $\sin(2\theta)$ en fonction de $\sin(\theta)$ et $\cos(\theta)$.

d) Déduire des deux questions précédentes que :

$$(E_2) \iff \begin{cases} \sin\left(\frac{x}{2}\right) = 0 \\ \text{ou} \\ \cos\left(\frac{x}{2}\right) = -\cos\left(\frac{7x}{2}\right) \end{cases}$$

e) En déduire toutes les solutions de l'équation (E_2).

Exercice 4. *Deux autres démonstrations pour la formule de* $\sum\limits_{k=1}^{n} k^2$.

Pour un entier naturel non nul n, on considère la somme $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2$.

L'exercice propose deux méthodes de démonstration de l'expression de S_n en fonction de n sans symbôle $\sum$, différentes de celle donnée dans le cours.

1) Rappeler la valeur de S_n donnée dans le cours.
Dorénavant, dans toute la suite de l'exercice, <u>on s'interdira d'utiliser cette formule</u>.

2) Écrire une fonction Python `sommeCarres(n)`, prenant en argument un entier $n > 0$, qui calcule la valeur de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2$ et la renvoie.

3) Rappeler la valeur de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k$. Cette formule pourra en revanche être utilisée dans la suite de l'exercice.

4) Première méthode de calcul de S_n.

a) Montrer que pour tout $k \in [\![1;n]\!]$, $k^3 - (k-1)^3 = 3k^2 - 3k + 1$.

b) En utilisant une somme télescopique, calculer $\sum_{k=1}^{n}(3k^2 - 3k + 1)$.

c) En déduire la valeur de S_n.

5) Deuxième méthode de calcul de S_n.

a) Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, $\dbinom{n+1}{2} = \dfrac{(n+1)n}{2}$.

b) Justifier que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, $\dbinom{n+1}{2} + \dbinom{n+1}{3} = \dbinom{n+2}{3}$.

c) Démontrer par récurrence que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k(k-1)}{2} = \binom{n+1}{3}$.

d) Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, $\dbinom{n+1}{3} = \dfrac{(n+1)n(n-1)}{6}$.

e) En déduire la valeur de S_n.