Lycée Fénelon BCPST1
Année 2020-21

Mathématiques
Devoir surveillé n° 4

Samedi 16 janvier 2021

Durée : 3 heures

Qualité de la rédaction, clarté des raisonnements, présentation, orthographe et ponctuation font partie des critères de notation.

Il est vivement recommandé de lire attentivement les questions, d'*encadrer les résultats* et de signaler clairement toute question admise.

Une partie de la notation sera attribuée à la présentation et lisibilité de la copie, à ce que les résultats soient encadrés proprement, à la règle et en couleur, ainsi qu'à la clarté de tous les raisonnements et calculs.

L'usage des calculatrices est interdit.

Exercice 1. *Résolution de systèmes linéaires*

Soit m un paramètre réel. Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ par la méthode du pivot de Gauss le système linéaire d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:

$$\begin{cases} x + y + mz = 1 \\ x + my + z = 1 \\ mx + y + z = 1 \end{cases}$$

On discutera selon les valeurs de m du nombre de solutions, et on précisera dans chaque cas l'ensemble des solutions $\mathscr{S}_m \subset \mathbb{R}^3$.

Exercice 2. *Calculs de primitives*

1. Justifier que la fonction $x \longmapsto (x+1)\left(\dfrac{1}{x^2+2x+2} + 3^{(x^2+2x+2)}\right)$ est définie sur $\mathbb{R}$ et en déterminer une primitive.

   Indication : on pourra calculer la fonction dérivée du trinôme $u : x \longmapsto x^2 + 2x + 2$.

2. On considère la fonction $f : x \longmapsto \sqrt{3x-1} + \dfrac{1}{\sqrt{1-2x}} + \dfrac{1}{(4-x)^3} + (x+1)^5$.

   (a) Déterminer l'ensemble de définition $\mathscr{D}_f$ de f.

   (b) Justifier brièvement l'existence d'une primitive de f sur $\mathscr{D}_f$ et en déterminer une.

3. On considère la fonction $g : x \longmapsto \cos(2x)\, \ln(\tan x)$.
   (a) Déterminer l'ensemble de définition $\mathscr{D}_g$ de g.
   (b) Justifier brièvement l'existence d'une primitive de g sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ et en déterminer une à l'aide d'une primitivation par parties.

4. À l'aide de plusieurs primitivations par parties, déterminer une primitive de $\varphi : x \mapsto \mathrm{e}^{3x} \cos(\mathrm{e}^x)$ sur $\mathbb{R}$.
   Indication. On pourra commencer par utiliser la décomposition $e^{3x} = e^{2x}\, e^x$.
   Dans une autre primitivation par parties, on pourra utiliser la décomposition $e^{2x} = e^x\, e^x$.

Exercice 3. *Équations différentielles du 1^{er} et 2^{nd} ordre*

Les questions 1 et 2 sont indépendantes.

1. *Une équation différentielle linéaire d'ordre 1*
   Dans cette question on s'intéresse à l'équation différentielle
   $$y' + y = \cos(x). \qquad (E)$$
   (a) Déterminer une solution particulière y_p de (E) à l'aide de la méthode de variation de la constante.
   (b) En déduire l'expression des solutions y de (E) à l'aide du paramètre réel λ.
   (c) Démontrer par l'absurde que les courbes des solutions de (E) ne se coupent pas. Pour cela, supposer que deux solutions distinctes y_1 et y_2 de (F) ont des courbes qui se coupent en un point d'abscisse x_0 et aboutir à une contradiction.
   (d) En déduire que pour tout $y_0 \in \mathbb{R}$ il existe une unique solution y de (E) pour laquelle $y(0) = y_0$.
   (e) Dans la suite on désigne par f l'unique solution de (E) vérifiant $f(0) = \dfrac{1}{2}$. Déterminer l'expression de $f(x)$ en fonction de x.
   (f) Dresser le tableau de variation de f sur l'intervalle $[-\pi; +\pi]$.
   (g) Tracer dans le plan muni d'un repère orthonormé la courbe représentative de f au dessus de l'intervalle $[-\pi; +\pi]$.

2. *Une équation différentielle linéaire d'ordre 2*
   Dans cette question on s'intéresse à l'équation différentielle :
   $$y'' + 4y = \cos(2x) + 3\sin(x)\ . \qquad (E)$$

(a) Déterminer une solution particulière de l'équation différentielle :

$$y'' + 4y = 3\sin(x) \qquad (E_2)$$

sous la forme $a\cos(x) + b\sin(x)$.

(b) Déterminer une solution particulière de l'équation différentielle :

$$y'' + 4y = \cos(2x) \qquad (E_1)$$

sous la forme $ax\cos(2x) + bx\sin(2x)$.

(c) En déduire toutes les solutions de l'équation différentielle (E).

(d) On note f la solution de (E) vérifiant les conditions initiales $f(0) = 1$ et $f'(0) = 1$. Déterminer l'expression de $f(x)$ en fonction de x.

Exercice 4. *Calculs de puissances de matrices*

On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Le but de l'exercice est de calculer les coefficients de A^n de 3 façons différentes.
Les questions 1, 2, 3 sont indépendantes.

On rappelle que I_3 désigne la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et O_3 désigne la matrice nulle de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$:

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad O_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. (a) Démontrer que pour tout entier naturel n, il existe u_n tel que $A^n = \begin{pmatrix} 2^n & u_n & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

   (b) Justifier l'égalité $A^nA = AA^n$. En identifiant certains coefficients des matrices A^nA et AA^n, déterminer la valeur de u_n.

   (c) Expliciter les coefficients de A^n.

2. Dans cette question on considère aussi la matrice :

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(a) Établir l'égalité $U^k = U$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. Cette relation est-elle vraie pour $k = 0$?

(b) Développer le produit $(I_3 + U)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(c) En déduire que $(I_3 + U)^n$ peut s'exprimer sous la forme $I_3 + \lambda U$ où λ est un nombre réel à déterminer.

(d) Expliciter les coefficients de A^n.

3. (a) Expliciter les coefficients des matrices $A - 2I_3$ et $A - I_3$ puis effectuer le produit matriciel : $(A - 2I_3) \times (A - I_3)$.

(b) En déduire l'expression de A^2 comme combinaison linéaire de A et I_3.

(c) Démontrer que pour tout entier naturel n, il existe deux réels a_n et b_n tels que $A^n = a_n A + b_n I_3$.

(d) Prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+2} = 3a_{n+1} - 2a_n$ et $b_{n+1} = -2a_n$.

(e) Exprimer a_n et b_n en fonction de n puis retrouver l'expression de A^n.