Exercice 1.

$$\left\{\begin{array}{l} x+y+mz=1 \\ x+my+z=1 \\ mx+y+z=1 \end{array}\right. \underset{\substack{L_2\leftarrow L_2-L_1\\ L_3\leftarrow L_3-mL_1}}{\iff} \left\{\begin{array}{r} x+y+mz=1 \\ (m-1)y+(1-m)z=0 \\ (1-m)y+(1-m^2)z=1-m \end{array}\right.$$
$$\underset{L_2\leftarrow L_2+L_1}{\iff} \left\{\begin{array}{r} x+y+mz=1 \\ (m-1)y+(1-m)z=0 \\ (2-m-m^2)z=1-m \end{array}\right.$$

Le système est réduit.

Déterminons les racines réelles du trinôme $2-m-m^2$.

Son discriminant est $\Delta = 1+8 = 9 = 3^2 > 0$ et ses deux racines réelles sont 1 et -2. Ainsi on a la factorisation :

$$2-m-m^2 = (1-m)(m+2)$$

On distingue maintenant plusieurs cas selon que m soit racine de $m-1$, de $2-m-m^2$ ou pas.

• *Premier cas.* Si $m=-2$; le système devient le système trapézoïdal :

$$\left\{\begin{array}{rl} x+y-2z=1 & \\ -3y+3z=0 & \text{il est incompatible} \\ 0=3 & \end{array}\right.$$

Dans ce cas il n'y aucune solution : $\mathscr{S}_{-2}=\varnothing$.

• *Deuxième cas.* Si $m=1$; le système devient le système trapézoïdal :

$$\left\{\begin{array}{rl} x+y+z=1 & \\ 0=0 & \text{il est compatible} \\ 0=0 & \end{array}\right.$$

Dans ce cas il y a une infinité de solutions, et l'ensemble des solutions est :

$$\mathscr{S}_1 = \left\{(1-y-z,y,z) \mid (y,z)\in\mathbb{R}^2\right\}$$

• *Troisième cas.* Si $m \notin \{1,-2\}$. Le système devient triangulaire :

$$\left\{\begin{array}{r} x+y+mz=1 \\ (m-1)y+(1-m)z=0 \\ (1-m)(m+2)z=1-m \end{array}\right. \underset{L_3\leftarrow \frac{1}{(1-m)(m+2)}L3}{\iff} \left\{\begin{array}{r} x+y+mz=1 \\ (m-1)y+(1-m)z=0 \\ z=\dfrac{1}{m+2} \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{r} x+y+mz=1 \\ y=\dfrac{1}{m+2} \\ z=\dfrac{1}{m+2} \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x=1-\dfrac{1}{m+2}-\dfrac{m}{m+2}=\dfrac{1}{m+2} \\ y=\dfrac{1}{m+2} \\ z=\dfrac{1}{m+2} \end{array}\right.$$

Ainsi il y a une unique solution et :

$$\mathscr{S}_m = \left\{\left(\frac{1}{m+2},\frac{1}{m+2},\frac{1}{m+2}\right)\right\}$$

En conclusion :

• Si $m=-2$:
$$\mathscr{S}_{-2}=\varnothing$$
• Si $m=1$:
$$\mathscr{S}_1 = \left\{(1-y-z,y,z) \mid (y,z)\in\mathbb{R}^2\right\}$$
• Dans tous les autres cas :
$$\mathscr{S}_m = \left\{\left(\frac{1}{m+2},\frac{1}{m+2},\frac{1}{m+2}\right)\right\}$$

Exercice 2.

1. Le trinôme u a pour discriminant $\Delta = 4-4\times 2 = -4$ donc il garde un signe constant sur $\mathbb{R}$. Plus précisément, u est strictement positif sur $\mathbb{R}$ car le coefficient de x^2 est strictement positif.

$$(x+1)\left(\frac{1}{x^2+2x+2}+3^{(x^2+2x+2)}\right) = \frac{x+1}{x^2+2x+2}+(x+1)\,\mathrm{e}^{\ln(3)(x^2+2x+2)}$$

Cette décomposition montre que

la fonction $x\longmapsto (x+1)\left(\dfrac{1}{x^2+2x+2}+3^{(x^2+2x+2)}\right)$ est définie sur $\mathbb{R}$.

$u'(x) = 2x+2 = 2(x+1)$ donc

$$(x+1)\left(\frac{1}{x^2+2x+2}+3^{(x^2+2x+2)}\right) = \frac{1}{2}\times\frac{2(x+1)}{x^2+2x+2}+ \frac{1}{2\ln 3}2\ln 3(x+1)\,\mathrm{e}^{\ln(3)(x^2+2x+2)}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{u'(x)}{u(x)} + \frac{1}{2\ln 3}v'(x)\,\mathrm{e}^{v(x)}$$
avec $v(x) = \ln(3)\,u(x)$

$\dfrac{u'}{u}$ se primitive en $\ln(|u|) = \ln u$ car u ne prend que des valeurs strictement positives.

$v'\,\mathrm{e}^v$ se primitive en $\mathrm{e}^v = 3^u$

Sur $\mathbb{R}$, $x \mapsto (x+1)\left(\dfrac{1}{x^2+2x+2} + 3^{(x^2+2x+2)}\right)$ a pour primitive $x \mapsto \dfrac{1}{2}\ln\left(x^2+2x+2\right) + \dfrac{1}{2\ln 3}3^{(x^2+2x+2)}$.

2. (a) $x \in \mathscr{D}_f \iff \begin{cases} 3x-1 \geqslant 0 \\ 1-2x > 0 \\ 4-x \neq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x \geqslant \frac{1}{3} \\ x < \frac{1}{2} \\ x \neq 4 \end{cases} \iff \begin{cases} x \in \left[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right[\\ x \neq 4 \end{cases}$

$\iff x \in \left[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right[$ car $4 \notin \left[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right[$.

$$\boxed{\mathscr{D}_f = \left[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right[}$$

(b) Les fonctions puissances sont continues sur leur ensemble de définition respectif.

Chacune des quatre fonctions affines $x \mapsto 3x-1$, $x \mapsto 1-2x$, $x \mapsto 4-x$ et $x \mapsto x+1$ est continue sur $\left[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right[$. Par ailleurs, la première est positive sur $\left[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right[$, la deuxième est strictement positive et la troisième ne s'annule pas donc, par composition et somme, la fonction f est continue sur $\mathscr{D}_f$.

On en déduit que **f admet une primitive sur $\left[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right[$.**

$f(x) = (3x-1)^{\frac{1}{2}} + (1-2x)^{-\frac{1}{2}} + (4-x)^{-3} + (x+1)^5$
$= \frac{1}{3}u_1'(x)(u_1(x))^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}u_2'(x)(u_2(x))^{-\frac{1}{2}} - u_3'(x)(u_3(x))^{-3} + u_4'(x)(u_4(x))^5$
avec $u_1(x) = 3x-1$, $u_2(x) = 1-2x$, $u_3(x) = 4-x$ et $u_4(x) = x+1$.

Sur $\left[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right[$, f admet comme primitive $x \longmapsto \frac{1}{3}\frac{(u_1(x))^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}\frac{(u_2(x))^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} - \frac{(u_3(x))^{-2}}{-2} + \frac{(u_4(x))^6}{6}$.

Sachant que $x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$ et $x^{\frac{3}{2}} = x\sqrt{x}$, on en déduit après simplifications que

Sur $\left[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right[$, f admet comme primitive :
$x \mapsto \dfrac{2}{9}(3x-1)\sqrt{3x-1} - \sqrt{1-2x} + \dfrac{1}{2(4-x)^2} + \dfrac{(x+1)^6}{6}$.

3. (a) $x \in \mathscr{D}_g \iff \begin{cases} x \in \mathscr{D}_{\tan} \\ \tan x > 0 \end{cases}$

On sait que $\mathscr{D}_{\tan}$ est la réunion de tous les intervalles $\left]-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi\right[$ lorsque k parcourt $\mathbb{Z}$.

On sait également que tan est périodique de période π donc pour connaitre son signe il suffit de connaitre son signe sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

Si $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ alors $\tan x > 0 \iff x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

Par π-périodicité de tan, on obtient : $\tan x > 0 \iff x \in \left]k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi\right[$ pour un certain $k \in \mathbb{Z}$.

$$\boxed{\mathscr{D}_g = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left]k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi\right[}$$

(b) On remarque que $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[\subset \mathscr{D}_g$. La fonction g est continue sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ par composition et produit donc **g admet sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ une primitive.**

On pose $u(x) = \cos(2x)$ et $V(x) = \ln(\tan x)$. On a $g = uV$.

Par composition, la fonction V est dérivable sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ et admet pour dérivée la fonction $v : x \mapsto \frac{\tan' x}{\tan x} = \frac{1}{\cos^2 x \tan x} = \frac{1}{\cancel{\cos^2 x}\frac{\sin x}{\cancel{\cos x}}} = \frac{1}{\cos x \sin x} = \frac{1}{\frac{1}{2}\sin(2x)} = \frac{2}{\sin(2x)}$.

La fonction u peut s'écrire $u(x) = \frac{1}{2}h'(x)\cos(h(x))$ avec $h(x) = 2x$ donc u admet comme primitive sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ la fonction $U : x \mapsto \frac{1}{2}\sin(h(x)) = \frac{1}{2}\sin(2x)$.

$U(x)v(x) = \frac{1}{\cancel{2}}\cancel{\sin(2x)}\frac{\cancel{2}}{\cancel{\sin(2x)}} = 1$ donc la fonction Uv a pour primitive $H : x \mapsto x$.

En primitivant par parties, on peut affirmer que $UV - H$ est une primitive de g.

Sur $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$, la fonction g admet comme primitive :
$x \longmapsto \dfrac{1}{2}\sin(2x)\,\ln(\tan x) - x$.

4. $\varphi(x) = \mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{e}^x\cos(\mathrm{e}^x) = f(x)G(x)$ avec $f(x) = \mathrm{e}^x\cos(\mathrm{e}^x)$ et $G(x) = \mathrm{e}^{2x}$.

La fonction f est de la forme $u'\cos(u)$ avec $u(x) = \mathrm{e}^x$ donc elle admet comme primitive la fonction $F : x \mapsto \sin(\mathrm{e}^x)$.

La fonction G est dérivable et elle admet comme dérivée la fonction $g : x \mapsto 2\,\mathrm{e}^{2x}$.

En primitivant par parties on peut dire que φ admet comme primitive la fonction $FG - H$ où H est une primitive de Fg.

Déterminons H à l'aide d'une nouvelle PPP.

$F(x)g(x) = 2\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{e}^x\sin(\mathrm{e}^x) = f_1(x)G_1(x)$ avec $f_1(x) = \mathrm{e}^x\sin(\mathrm{e}^x)$ et $G_1(x) = 2\,\mathrm{e}^x$.

La fonction f_1 est de la forme $u'\sin(u)$ avec $u(x) = \mathrm{e}^x$ donc elle admet comme primitive la fonction $F_1 : x \mapsto -\cos(\mathrm{e}^x)$.

La fonction G_1 est dérivable et elle admet comme dérivée la fonction $g_1 : x \mapsto 2\,\mathrm{e}^x$.

La fonction $F_1g_1 : x \mapsto -2\,\mathrm{e}^x\cos(\mathrm{e}^x)$ est de la forme $-2u'\cos(u)$ avec $u(x) = \mathrm{e}^x$ donc elle admet comme primitive la fonction $H_1 : x \mapsto -2\sin(\mathrm{e}^x)$.

En primitivant par parties on peut dire que $H = F_1G_1 - H_1$.

Par report, φ admet comme primitive $FG - F_1G_1 + H_1$.

Sur $\mathbb{R}$, φ admet comme primitive la fonction :
$x \longmapsto \mathrm{e}^{2x}\sin(\mathrm{e}^x) + 2\,\mathrm{e}^x\cos(\mathrm{e}^x) - 2\sin(\mathrm{e}^x)$.

Exercice 3.

1. (a) L'équation homogène associée $y' + y = 0$ a pour solutions toutes les fonctions de la forme $x \mapsto \lambda e^{-x}$ avec λ un paramètre réel.

   Cherchons une solution particulière sous la forme $y_p(x) = \lambda(x)e^{-x}$; cela revient à :

   $$\lambda(x) = \int \cos(x)e^x dx$$

   Calculons à l'aide de 2 primitivations par partie une primitive $I = \int \cos(x)e^x dx$:

   $$\begin{aligned} I &= \underbrace{\int \cos(x)e^x dx}_{u=\cos x \quad v'=e^x} \\ &= \cos(x)e^x + \underbrace{\int \sin(x)e^x dx}_{u=\sin x \quad v'=e^x} \\ &= \cos(x)e^x + \sin(x)e^x - \underbrace{\int \cos(x)e^x dx}_{=I} \\ \implies 2I &= \cos(x)e^x + \sin(x)e^x \\ \implies I &= \frac{1}{2}\left(\cos(x) + \sin(x)\right)e^x \end{aligned}$$

   D'où la solution particulière : $\boxed{y_p(x)} = \frac{1}{2}\left(\cos(x) + \sin(x)\right)$.

   (b) Les solutions de l'équation homogène associée $y' + y = 0$ sont les fonctions $x \longmapsto \lambda\,\mathrm{e}^{-x}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

   D'après la question précédente, les solutions de (E) sont :

   $$\boxed{\mathscr{S}_E = \left\{x \longmapsto \frac{1}{2}\left(\cos(x) + \sin(x)\right) + \lambda\,\mathrm{e}^{-x} | \lambda \in \mathbb{R}\right\}}$$

   (c) Soit y_1 et y_2 deux solutions distinctes de (E). Notons $y_1(x) = \frac{1}{2}\left(\cos(x) + \sin(x)\right) + \lambda_1\,\mathrm{e}^{-x}$ et $y_2(x) = \frac{1}{2}\left(\cos(x) + \sin(x)\right) + \lambda_2\,\mathrm{e}^{-x}$ avec $\lambda_1 \neq \lambda_2$.
   Or :

   $$\begin{aligned} & y_1(x_0) = y_2(x_0) \\ \implies & \cancel{\frac{1}{2}\left(\cos(x_0) + \sin(x_0)\right)} + \lambda_1\,\mathrm{e}^{-x_0} = \cancel{\frac{1}{2}\left(\cos(x_0) + \sin(x_0)\right)} + \lambda_2\,\mathrm{e}^{-x_0} \\ \implies & \lambda_1 \cancel{\mathrm{e}^{-x_0}} = \lambda_2 \cancel{\mathrm{e}^{-x_0}} \\ \implies & \lambda_1 = \lambda_2 \end{aligned}$$

   ce qui est contradictoire. Ainsi, deux solutions distinctes de (E) ne peuvent pas avoir des courbes qui se coupent.

(d) Puisque s'il existe une solution de (E) vérifiant $y(0) = y_0$, d'après la question précédente cette solution est unique, il suffit de montrer que pour tout $y_0 \in \mathbb{R}$ il existe une solution de (E) vérifiant $y(0) = y_0$.

Soit y_0 un réel quelconque. Une solution de (E) est de la forme $y(x) = \frac{1}{2}(\cos(x) + \sin(x)) + \lambda\, \mathrm{e}^{-x}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$y(0) = \frac{1}{2} + \lambda\, \mathrm{e}^{(}0) = y_0 \iff \lambda = y_0 - \frac{1}{2}$$

Ainsi pour tout $y_0 \in \mathbb{R}$, $y(x) = \frac{1}{2}(\cos(x) + \sin(x)) + (y_0 - \frac{1}{2})\, \mathrm{e}^{-x}$ est l'unique solution de (E) vérifiant $y(0) = y_0$.

(e) En particulier, pour $y_0 = \frac{1}{2}$, l'unique solution f de (E) vérifiant $f(0) = y_0$ est : $f : x \mapsto \frac{1}{2}(\cos(x) + \sin(x))$.

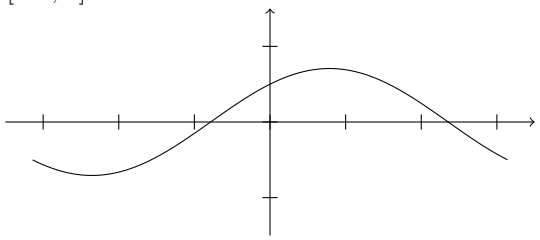
(f) Simplifions $f(x)$:

$$f(x) = \frac{1}{2}(\cos(x) + \sin(x)) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos(x) + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin(x)\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

(g) D'où le tableau de variation et le tracé de f sur $[-\pi, \pi]$:

x	$-\pi$		$-\frac{3\pi}{4}$		$\frac{\pi}{4}$		$+\pi$
f	$-\frac{1}{2}$	↘	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	↗	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	↘	$-\frac{1}{2}$

(h) Tracé sur $[-\pi, \pi]$:



2. (a) On cherche une solution particulière sous la forme $y_{1p}(x) = a\cos x + b\sin x$ (i n'étant pas solution de l'équation caractéristique $r^2 + 4 = 0$). On a alors $y'_{1p}(x) = -a\sin(x) + b\cos(x)$ et $y''_{1p}(x) = -a\cos(x) - b\sin(x)$. Ainsi : y_{1p} est solution de $y'' + 4y = 3\sin(x) \iff 3a\cos(x) + 3b\sin(x) = 3\sin(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. En choisissant $a = 0$ et $b = 1$, $y_{1p}(x) = \sin x$ est solution particulière de (E_1).

$y_{1p} : x \longmapsto \sin(x)$ est une solution particulière de $y'' + 4y = 3\sin(x)$.

(b) On cherche une solution particulière sous la forme $y_{2p}(x) = ax\cos(2x) + bx\sin(2x)$ (puisque $2i$ est solution de l'équation caractéristique). On a alors :

$$y'_{2p}(x) = a\cos 2x - 2ax\sin 2x + b\sin 2x + 2bx\cos 2x$$
$$y''_{2p}(x) = -4a\sin 2x + 4b\cos 2x - 4ax\cos 2x - 4bx\sin 2x$$

Ainsi y_{2p} est solution de y" $+4y = \cos 2x$ si set seulement si pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$-4a\sin 2x + 4b\cos 2x = \cos 2x$$

il suffit de poser $a = 0$ et $b = \frac{1}{4}$.

$y_{2p} : x \longmapsto \frac{1}{4}x\sin(2x)$ est une solution particulière de $y'' + 4y = \cos(2)\, x$.

D'après le principe de superposition,

$y_p = y_{1p} + y_{2p} : x \longmapsto \sin(x) + \frac{1}{4}x\sin(2x)$ est une solution particulière de (E).

(c) L'équation homogène associée $y'' + 4y = 0$ a pour équation caractéristique $x^2 + 4 = 0 \iff x^2 - (2\mathrm{i})^2 = 0 \iff (x - 2\mathrm{i})(x + 2\mathrm{i}) = 0 \iff x = 2\mathrm{i}$ ou $x = -2\mathrm{i}$.

Les solutions de $y'' + 4y = 0$ sont les fonctions $x \longmapsto \lambda\cos(2)\, x + \mu\sin(2)\, x$ avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. Ainsi :

y est une solution de $(E) \iff \exists(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que $y(x) = y_p(x) + \lambda\cos(2)\, x + \mu\sin(2)\, x$

D'après la question b),

Les solutions de (E) sont les fonctions
$y : x \longmapsto \sin(x) + \frac{1}{4}x\sin(2x) + \lambda\cos(2x) + \mu\sin(2x)$ où $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

(d) Soit y une solution de (E) ; il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$y(x) = \sin x + \frac{1}{4}x\sin 2x + \lambda\cos 2x + \mu\sin 2x$$

y est dérivable et

$$y'(x) = \cos x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{2}x\cos 2x - 2\lambda\sin 2x + 2\mu\cos 2x$$

Ainsi $y(0) = y'(0) = 1$ si et seulement si :

$$\begin{cases} \lambda = 1 \\ 1 + 2\mu = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda = 1 \\ \mu = 0 \end{cases}$$

Ainsi l'unique solution y de (E) vérifiant $y(0) = y'(0) = 1$ est :

$$\boxed{y : x \mapsto \sin x + \frac{1}{4}x\sin 2x + \cos 2x}$$

Exercice 4.

1. (a) Notons $\mathscr{P}(n)$ la propriété : il existe u_n tel que $A^n = \begin{pmatrix} 2^n & u_n & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Démontrons par récurrence que $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Initialisation.

Sachant que $A^0 = I_3$ et que $2^0 = 1$, l'égalité a bien lieu au rang 0 en posant $u_0 = 0$ d'où $\mathscr{P}(0)$.

Hérédité.

Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $\mathscr{P}(n)$ est vraie (HR).

$$A^{n+1} = A^n A \overset{\text{HR}}{=} \begin{pmatrix} 2^n & u_n & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{n+1} & 2^n + u_n & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{n+1} & u_{n+1} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ en posant $u_{n+1} = 2^n + u_n$ d'où $\mathscr{P}(n+1)$.

Conclusion.

La propriété est vraie au rang 0 et héréditaire à partir du rang 0 donc elle est vraie pour tout entier naturel n.

(b) On sait que $A^{n+1} = A^n A$ et $A^{n+1} = AA^n$ donc $\boxed{A^n A = AA^n}$ (autrement dit A et A^n commutent).

Effectuons ces deux produits matriciels.

D'après la question précédente $A^n A = \begin{pmatrix} 2^{n+1} & 2^n + u_n & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$$AA^n = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2^n & u_n & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{n+1} & 2u_n + 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

En identifiant les coefficients de ces deux matrices produit à la première ligne et à la deuxième colonne, on trouve $2^n + u_n = 2u_n + 1$ d'où $\boxed{u_n = 2^n - 1}$.

(c) En reportant la valeur de u_n trouvée à la question précédente, on obtient :

$$\boxed{A^n = \begin{pmatrix} 2^n & 2^n - 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

2. (a) Par le calcul on trouve $U^2 = U$.

Démontrons que $\forall k \in \mathbb{N}^*, U^k = U$.

La propriété est vraie au rang 1.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$, supposons que $U^k = U$ (HR).

$U^{k+1} = U^k U = UU = U^2 = U$ d'où la propriété au rang $k+1$.

On en déduit que $\boxed{U^k = U \text{ pour tout } k \in \mathbb{N}^*}$.

(b) I_3 et U commutent donc par la formule du binôme de Newton, $(I_3 + U)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} I_3^{n-k} U^k$

(c) $(I_3 + U)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} U^k = I_3 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} U^k = I_3 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} U$

$= I_3 + \left(\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k}\right).U = I_3 + \left(-1 + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\right).U = I_3 + (-1 + 2^n).U$

$\boxed{(I_3 + U)^n = I_3 + (2^n - 1).U}$

(d) Sachant que $A = I_3 + U$, on retrouve, après calcul,

$$\boxed{A^n = (I_3 + U)^n = \begin{pmatrix} 2^n & 2^n - 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

3. (a) $A-2I_3=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$ et $A-I_3=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$.

On trouve $(A-2I_3)(A-I_3)=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$

$\boxed{(A-2I_3)(A-I_3)=O_3}$

(b) $O_3=(A-2I_3)(A-I_3)=A^2-2I_3A-AI_3+2I_3^2=A^2-3A+2I_3$ d'où $\boxed{A^2=3A-2I_3}$

(c) Démontrons cette propriété par récurrence pour tout $n\in\mathbb{N}$.

Initialisation.
$A^0=I_3$ et $a_0A+b_0I_3=I_3$ en posant $a_0=0$ et $b_0=1$ donc la propriété est vérifiée au rang 0.

Hérédité.
Supposons qu'il existe deux réels a_n et b_n tels que $A^n=a_nA+b_nI_3$. (HR)
$A^{n+1}=AA^n\overset{\text{HR}}{=}A(a_nA+b_nI_3)=a_nA^2+b_nAI_3\overset{2.(b)}{=}a_n(3A-2I_3)+b_nA=(3a_n+b_n)A-2a_nI_3$.
On peut écrire $A^{n+1}=a_{n+1}A+b_{n+1}I_3$ avec $a_{n+1}=3a_n+b_n$ et $b_{n+1}=-2a_n$ d'où la propriété au rang $n+1$.

Conclusion.
$\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\ \exists(a_n,b_n)\in\mathbb{R}^2,\ A^n=a_nA+b_nI_3}$.

(d) D'après la question précédente, on a les relations $a_{n+1}=3a_n+b_n$ et $\boxed{b_{n+1}=-2a_n}$. Remplaçons n par $n+1$ dans la première relation : $a_{n+2}=3a_{n+1}+b_{n+1}$. Avec la deuxième relation on obtient alors $\boxed{a_{n+2}=3a_{n+1}-2a_n}$.

(e) (a_n) est une SRL2 d'équation caractéristique $x^2-3x+2=0$. $\Delta=(-3)^2-4\times2=1=1^2$, $x_1=\frac{3-1}{2}=1$ et $x_2=\frac{3+1}{2}=2$. Il existe $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$ tels que $\forall n\in\mathbb{N},\ a_n=\lambda1^n+\mu2^n=\lambda+\mu2^n$.
$\begin{cases}\lambda+\mu2^0=a_0=0\\ \lambda+\mu2^1=a_1=3a_0+b_0=3\times0+1=1\end{cases}$
On reporte $\mu=-\lambda$ dans la deuxième équation : $-\lambda=1$ donc $\lambda=-1$. On a alors $\mu=1$ et $\boxed{a_n=2^n-1}$.
Si $n\geqslant0, b_{n+1}=-2a_n$ donc si $n\geqslant1, b_n=-2a_{n-1}=-2(2^{n-1}-1)=-2^n+2$.
On a $\boxed{b_n=2-2^n}$ y compris pour $n=0$.

$$\begin{aligned}A^n&=(2^n-1)A+(2-2^n)I_3\\&=\begin{pmatrix}2\times2^n-2&2^n-1&0\\0&2^n-1&0\\0&0&2^n-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2-2^n&0&0\\0&2-2^n&0\\0&0&2-2^n\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}2^n&2^n-1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$\boxed{A^n=\begin{pmatrix}2^n&2^n-1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}}$$