Lycée Fénelon
Année 2021-22

BCPST1

Mathématiques
Devoir surveillé n° 4

Samedi 15 janvier 2022

Durée : 2 heures

Qualité de la rédaction, clarté des raisonnements, présentation, orthographe et ponctuation font partie des critères de notation.
Il est vivement recommandé de lire attentivement les questions, d'*encadrer les résultats* et de signaler clairement toute question admise.

L'usage des calculatrices est interdit.

Exercice 1. *Calcul de sommes.*

Soit $x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$. Montrer que :

1. $$\sum_{k=0}^{n} \sin(kx) = \sin\frac{nx}{2} \times \frac{\sin\frac{(n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$$

2. $$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sin(kx) = 2^n \sin\left(\frac{nx}{2}\right) \times \cos^n\left(\frac{x}{2}\right)$$

Exercice 2. *Calcul de primitives*

Les questions 1,2 et 3 sont indépendantes.

1. Soit la fonction $f \ : \ t \longmapsto \dfrac{\sin(t)}{1+\cos(t)}$.
   (a) Déterminer l'ensemble de définition de f.
   (b) Déterminer une primitive de f sur l'un des intervalles où elle est définie.
2. Soit la fonction $g \ : \ x \longmapsto x \ln\left(\dfrac{x}{x+1}\right)$.
   (a) Déterminer l'ensemble de définition de g.
   (b) Montrer que $\exists (a,b) \in \mathbb{R}^2$, $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, $\dfrac{x}{x+1} = a + \dfrac{b}{x+1}$.
   (c) Déterminer une primitive de g sur son ensemble de définition (on procèdera par parties).
3. Soit la fonction $h \ : \ x \longmapsto x 2^{x^2}$.
   (a) Déterminer l'ensemble de définition de h.
   (b) Déterminer une primitive de h sur son ensemble de définition.

Exercice 3. *Études de suites*

Les questions 1 et 2 sont indépendantes.

1. Soit a un réel strictement positif. Soit (u_n) la suite définie par son premier terme $u_0 > 0$ et par la relation de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = a \times u_n^2$. Le but de l'exercice est d'obtenir l'expression de u_n en fonction de n, a et u_0.
   (a) On pose $v_n = \ln u_n$. Montrer que la suite (v_n) est arithmético-géométrique puis exprimer v_n en fonction de n, a et u_0.
   (b) En déduire que la suite (u_n) peut s'exprimer sous la forme $u_n = \lambda \times \alpha^{\beta_n}$ où λ et α sont des réels strictement positifs, et β_n est une suite de réels, que l'on exprimera en fonction de n, a et u_0.
2. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 2$, $u_2 = -1$ et la relation de récurrence :
$$\forall \in \mathbb{N},\ u_{n+3} - 2u_{n+2} - 5u_{n+1} + 6u_n = 2^n$$
   Le but de l'exercice est de déterminer l'expression de u_n en fonction de n.
   (a) Pour tout entier n on pose $v_n = u_{n+1} - u_n$. Déterminer v_0 et v_1 et montrer que (v_n) satisfait la relation de récurrence :
$$v_{n+2} - v_{n+1} - 6v_n = 2^n \tag{R}$$
   (b) Déterminer une suite (t_n) géométrique de raison 2, satisfaisant la relation de récurrence (R).
   (c) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = v_n - t_n$. Montrer que (w_n) est une suite récurrente linéaire d'ordre 2 puis en déduire l'expression de w_n en fonction de n.
   (d) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} v_k$.
   (e) En déduire l'expression de u_n en fonction de n

Exercice 4. *Équations différentielles*

Les questions 1), 2) et 3) sont indépendantes.

1. Résoudre l'équation différentielle :
$$y'' - y' + y = 1 \tag{E_1}$$
2. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle :
$$y'' - 6y' + 9y = e^{2x} + e^{3x}$$
   Indication : des solutions particulières de $y'' - 6y' + 9y = e^{2x}$ et $y'' - 6y' + 9y = e^{3x}$ peuvent se chercher respectivement sous la forme ae^{2x} et bx^2e^{3x}.

3. On considère l'équation différentielle :

$$(1-e^{-x})y'(x)+y(x)=xe^{-x} \tag{E}$$

   (a) Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$ l'équation différentielle :

$$(1-e^{-x})y'(x)+y(x)=0 \tag{H}$$

   (*Indication :* on pourra remarquer que $\dfrac{1}{1-e^{-x}}=\dfrac{e^x}{e^x-1}$.)

   (b) En déduire les solutions sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$ de (E).

   (c) Parmi les solutions obtenues déterminer celles ayant une limite finie en 0.

   (d) En déduire qu'il n'existe qu'une seule fonction continue f sur $\mathbb{R}$ qui soit solution de (E) à la fois sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$.

   (e) Prouver que f est l'unique solution de (E) sur $\mathbb{R}$.