Exercice 1

1.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n}\sin(kx) &= \sum_{k=0}^{n} Im\left(e^{ikx}\right) \\
&= Im\left(\sum_{k=0}^{n} e^{ikx}\right) && \text{car } Im(z)+Im(z')=Im(z+z') \\
&= Im\left(\sum_{k=0}^{n}\left(e^{ix}\right)^{k}\right) && \text{Formule de Moivre} \\
&= Im\left(\frac{1-\left(e^{ix}\right)^{n+1}}{1-e^{ix}}\right) && \text{car } x\not\equiv 0\ [2\pi] \implies e^{ix}\neq 1 \\
&= Im\left(\frac{1-e^{i(n+1)x}}{1-e^{ix}}\right) && \text{Formule de Moivre} \\
&= Im\left(\frac{e^{i0}-e^{i(n+1)x}}{e^{i0}-e^{ix}}\right) && \text{car } e^{i0}=1 \\
&= Im\left(\frac{e^{i\frac{(n+1)x}{2}}}{e^{i\frac{x}{2}}}\times\frac{(-2i)\sin\frac{(n+1)x}{2}}{(-2i)\sin\frac{x}{2}}\right) && \text{angle moitié} \\
&= Im\left(e^{i\frac{nx}{2}}\times\frac{\sin\frac{(n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\right) && \text{car } \frac{e^{z}}{e^{z'}}=e^{z-z'} \\
&= Im\left(e^{i\frac{nx}{2}}\right)\times\frac{\sin\frac{(n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}} && \text{car } \frac{\sin\frac{(n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\in\mathbb{R} \\
&= \boxed{\sin\frac{nx}{2}\times\frac{\sin\frac{(n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}}
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\sin(kx) &= \sum_{k=0}^{n} Im\left(\binom{n}{k}e^{ikx}\right) \\
&= Im\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}e^{ikx}\right) && \text{car } Im(z)+Im(z')=Im(z+z') \\
&= Im\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(e^{ix}\right)^{k}\times 1^{n-k}\right) && \text{Formule de Moivre} \\
&= Im\left((1+e^{ix})^{n}\right) && \text{Formule du binôme} \\
&= Im\left(\left[e^{i\frac{x}{2}}\times\left(e^{-i\frac{x}{2}}+e^{i\frac{x}{2}}\right)\right]^{n}\right) && \text{angle moitié} \\
&= Im\left(e^{i\frac{nx}{2}}\times\left(2\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right)^{n}\right) && \text{Formules de Moivre et d'Euler} \\
&= Im\left(e^{i\frac{nx}{2}}\times 2^{n}\times\cos^{n}\left(\frac{x}{2}\right)\right) \\
&= Im\left(e^{i\frac{nx}{2}}\right)\times 2^{n}\times\cos^{n}\left(\frac{x}{2}\right) && \text{car } 2^{n}\times\cos^{n}\left(\frac{x}{2}\right)\in\mathbb{R} \\
&= \boxed{2^{n}\times\sin\left(\frac{nx}{2}\right)\times\cos^{n}\left(\frac{x}{2}\right)}
\end{aligned}$$

Exercice 2.

1. (a) sin et cos étant définies sur $\mathbb{R}$, f est définie si $1+\cos(t)\neq 0$. Or $1+\cos(t)=0 \iff \cos(t)=-1=\cos(\pi) \iff t=\pi+2k\pi, k\in\mathbb{Z}$.
D'où $\boxed{\mathcal{D}_f=\mathbb{R}\smallsetminus\left\{\pi+2k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}}$.

   (b) Sur l'un des intervalles $]-\pi+2k\pi,\pi+2k\pi[$, où $k\in\mathbb{Z}$, $f(t)=-\dfrac{\cos'(t)}{1+\cos(t)}$, dont une primitive est $F(t)=-\ln|1+\cos(t)|$. Comme $1+\cos(t)\geq 0$ pour tout réel t, on obtient $\boxed{F(t)=-\ln\left(1+\cos(t)\right)}$.

2. (a) g est définie si $x+1\neq 0$ et $\dfrac{x}{x+1}>0$. Or pour $x\neq -1$, $\dfrac{x}{x+1}$ et $x(x+1)$ ont le même signe : cette dernière expression étant un trinôme de racines 0 et 1, elle est strictement positive sur $]-\infty,-1[\cup]0,+\infty[$. D'où $\boxed{\mathcal{D}_g=]-\infty,-1[\cup]0,+\infty[}$.

   (b) $\forall x\in\mathbb{R}\smallsetminus\{-1\}$, $\dfrac{x}{x+1}\underset{\text{astuce}}{=}\dfrac{x+1-1}{x+1}=\dfrac{x+1}{x+1}-\dfrac{1}{x+1}$ d'où $\boxed{\dfrac{x}{x+1}=1-\dfrac{1}{x+1}}$.

   (c) On a $g=u'v$ avec $u'(x)=x$ et $v(x)=\ln\left(\dfrac{x}{x+1}\right)=\ln\left(1-\dfrac{1}{x+1}\right)$. Par parties, on primitive u', ce qui donne $u(x)=\dfrac{x^2}{2}$, et on dérive v, ce qui donne $v'(x)=\dfrac{\frac{1}{(x+1)^2}}{1-\frac{1}{x+1}}=\dfrac{1}{(x+1)^2-(x+1)}=\dfrac{1}{x^2+2x+1-x-1}=\dfrac{1}{x(x+1)}$. Les fonctions u et v sont classe $\mathscr{C}^1$; on pose alors $w(x) = uv'(x) = \frac{x^{\cancel{2}}}{2} \times \frac{1}{\cancel{x}(x+1)} = \frac{1}{2} \times \frac{x}{x+1} \underset{b)}{=} \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{x+1}\right)$. Une primitive de w est alors $W(x) = \frac{1}{2}(x - \ln|x+1|)$.

Voilà enfin une primitive de g, qui est $G(x) = uv(x) - W(x) = \frac{x^2}{2}\ln\left(\frac{x}{x+1}\right) - \frac{1}{2}(x - \ln|x+1|)$, soit $\boxed{G(x) = \frac{x^2\ln\left(\frac{x}{x+1}\right) - x + \ln|x+1|}{2}}$.

3. (a) $x \longmapsto 2^{x^2}$ est la composée de la fonction carrée, définie sur $\mathbb{R}$, avec la fonction exponentielle de base 2, définie aussi sur $\mathbb{R}$. Ceci entraîne que $\boxed{\mathcal{D}_h = \mathbb{R}}$.

(b) $\forall x \in \mathbb{R},\ h(x) = x2^{x^2} = x\exp x^2\ln(2) = \frac{1}{2\ln(2)}2\ln(2)x\exp x^2\ln(2) = \frac{1}{2\ln(2)}\left(x^2\ln(2)\right)'\exp x^2\ln(2)$: on a reconnu une expression du type $u'\exp u$.

Une primitive de h sur $\mathbb{R}$ est donnée par $H(x) = \frac{1}{2\ln(2)}\exp x^2\ln(2)$, ou encore $\boxed{H(x) = \frac{1}{2\ln(2)}2^{x^2}}$.

Exercice 3.

1. (a) Soit $v_n = \ln u_n$; (v_n) est bien définie puisqu'une récurrence immédiate montre que pour tout $\nu \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$. On a pour tout entier n :

$$v_{n+1} = \ln u_{n+1} = \ln\left(a \times u_n^2\right) = \ln(a) + 2\ln u_n = \ln(a) + 2 \times v_n$$

Ainsi la suite (v_n) est arithmético-géométrique avec pour premier terme $v_0 = \ln u_0$.

Déterminons l'expression de v_n en fonction de n. Soit I point fixe de la fonction de récurrence : $I = \ln(a) + 2I \implies I = -\ln(a)$. La suite $w_n = v_n - I = v_n + \ln(a)$ est alors géométrique de raison 2 et de premier terme $w_0 = \ln(u_0) + \ln(a) = \ln(a \times u_0)$. Ainsi :

$$\forall \in \mathbb{N},\ w_n = \ln(a \times u_0) \times 2^n$$
$$\implies \forall \in \mathbb{N},\ \boxed{v_n = -\ln(a) + \ln(a \times u_0) \times 2^n}$$

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \ln u_n = -\ln(a) + \ln(a \times u_0) \times 2^n$, et donc :

$$u_n = \exp v_n = e^{-\ln a} \times e^{2^n\ln(au_0)} = \boxed{\frac{1}{a} \times (au_0)^{2^n}}$$

En particulier $u_n = \lambda \times \alpha^{\beta_n}$ avec $\boxed{\lambda = \frac{1}{a},\ \alpha = au_0 \text{ et } \beta_n = 2^n}$.

2. (a) Soit $v_n = u_{n+1} - u_n$; alors $\boxed{v_0 = u_1 - u_0 = 2}$, $\boxed{v_1 = u_2 - u_1 = -3}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} & u_{n+3} - 2u_{n+2} - 5u_{n+1} + 6u_n = 2^n \\ = \ & u_{n+3} - u_{n+2} - u_{n+2} + u_{n+1} - 6u_{n+1} + 6u_n = 2^n \\ = \ & (u_{n+3} - u_{n+2}) - (u_{n+2} - u_{n+1}) - 6(u_{n+1} - u_n) = 2^n \\ = \ & \boxed{v_{n+2} - v_{n+1} - 6v_n = 2^n} \end{aligned}$$

Ainsi (v_n) satisfait la relation de récurrence (R).

(b) Soit (t_n) une suite géométrique de raison 2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $t_n = t_0 \times 2^n$. Pour que (t_n) satisfasse la relation (R) il faut et il suffit que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} & t_0 2^{n+2} - t_0 2^{n+1} - 6t_0 2^n = 2^n \\ \iff & t_0 2^n(4 - 2 - 6) = 2^n \\ \iff & t_0 = -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}$, $\boxed{t_n = -\frac{1}{4} \times 2^n}$.

(c) Soit $w_n = v_n - t_n$. On a :

$$\left.\begin{array}{l} v_{n+2} - v_{n+1} - 6v_n = 2^n \\ t_{n+2} - t_{n+1} - 6t_n = 2^n \end{array}\right\} \implies v_{n+2} - t_{n+2} - (v_{n+1} - t_{n+1}) - 6(v_n - t_n) = 0$$

Ainsi (w_n) satisfait la relation de récurrence :

$$w_{n+2} - w_{n+1} - 6w_n = 0$$

Elle est donc récurrente linéaire d'ordre 2. L'équation caractéristique associée est $r^2 - r - 6 = 0$ qui admet deux solutions réelles distinctes -2 et 3. Ainsi il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $w_n = a(-2)^n + b \times 3^n$.

Déterminons a et b à l'aide des deux premiers termes $w_0 = v_0 - t_0 = 2 + \frac{1}{4} = \frac{9}{4}$ et $w_1 = v_1 - t_1 = -3 + \frac{1}{2} = -\frac{5}{2}$. On a donc :

$$\begin{cases} a+b = \frac{9}{4} \\ -2a+3b = -\frac{5}{2} \quad L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1 \end{cases} \iff \begin{cases} a+b = \frac{9}{4} \\ 5b = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} a = \frac{37}{20} \\ b = \frac{2}{5} \end{cases}$$

Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\boxed{w_n = \frac{37}{20} \times (-2)^n + \frac{2}{5} \times 3^n}$.

(d) Par télescopage, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n-1} v_k = \sum_{k=0}^{n-1} u_{k+1} - u_k = u_n - u_0 = u_n}$$

(e) Il découle de (b) et (c) que $\forall \nu \in \mathbb{N}$, $v_n = w_n + t_n = \frac{37}{20} \times (-2)^n + \frac{2}{5} \times 3^n - \frac{1}{4} \times 2^n$
Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} u_n &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{37}{20} \times (-2)^k + \frac{2}{5} \times 3^k - \frac{1}{4} \times 2^k \\ &= \frac{37}{20} \sum_{k=0}^{n-1} \times (-2)^k + \frac{2}{5} \sum_{k=0}^{n-1} 3^k - \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{n-1} 2^k \\ &= \frac{37}{20} \times \frac{1-(-2)^n}{1-(-2)} + \frac{2}{5} \times \frac{1-3^n}{1-3} - \frac{1}{4} \times \frac{1-2^n}{1-2} \\ &= \frac{37}{60} \times (1-(-2)^n) - \frac{1}{5} \times (1-3^n) + \frac{1}{4} \times (1-2^n) \\ &= \boxed{-\frac{37}{60} \times (-2)^n + \frac{1}{5} \times 3^n - \frac{1}{4} \times 2^n + \frac{2}{3}} \end{aligned}$$

Exercice 4.

1. On considère l'équation différentielle linéaire du second ordre : $y'' - y' + y = 1$.
Son équation homogène associée est : $y'' - y' + y = 0$. Elle a pour équation caractéristique $r^2 - r + 1 = 0$ dont les solutions sont les deux complexes conjugués $r_1 = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}$ et $r_2 = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}$.
Les solutions de l'équation homogène sont donc toutes fonctions de la forme :
$x \mapsto \exp\left(\frac{x}{2}\right)\left(\lambda \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + \mu \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right)$ avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.
Une solution particulière de (E_1) est la fonction constante $x \mapsto 1$; les solutions de (E_1) sont donc toutes les fonctions de la forme :
$\boxed{x \mapsto 1 + \exp\left(\frac{x}{2}\right)\left(\lambda \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + \mu \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right)}$ avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$

2. On considère l'équation $(E) \ : \ y'' - 6y' + 9y = e^{2x} + e^{3x}$.
Son équation homogène associée est $(H) \ : \ y'' - 6y' + 9y = 0$. Elle a pour équation caractéristique $r^2 - 6r + 9 = 0$ qui a pour seule solution $r_0 = 3$. Ainsi les solutions de (H) sont toutes les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ et de la forme : $x \mapsto (\lambda + \mu x)e^3 x$ avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

Pour déterminer une solution particulière appliquons le principe de superposition des solutions.
Cherchons un solution particulière y_1 de $(E_1) \ : \ y'' - 6y' + 9y = e^{2x}$. Puisque 2 n'est pas solution de l'équation caractéristique, on peut chercher y_1 sous la forme $y_1(x) = ae^{2x}$; alors :

$$y_1'(x) = 2ae^{2x} \qquad y_1''(x) = 4ae^{2x}$$

Ainsi y_1 est solution de (E_1) si et seulement si :

$$4ae^{2x} - 6 \times 2ae^{2x} + 9 \times ae^{2x} = e^{2x} \iff a = 1$$

Une solution particulière de (E_1) est $y_1 : x \mapsto e^{2x}$.

Cherchons un solution particulière y_2 de $(E_2) \ : \ y'' - 6y' + 9y = e^{3x}$. Puisque 3 est solution double de l'équation caractéristique, on peut chercher y_2 sous la forme $y_2(x) = bx^2e^{3x}$; alors :
$y_2'(x) = 3bx^2e^{3x} + 2bxe^{3x} = (3bx^2 + 2bx)e^{3x}$
$y_2''(x) = 9bx^2e^{3x} + 6bxe^{3x} + 6bxe^{3x} + 2be^{3x} = (9bx^2 + 12bx + 2b)e^{3x}$.
Ainsi y_2 est solution de (E_2) si et seulement si :

$$(9bx^2 + 12bx + 2b)e^{3x} - 6(3bx^2 + 2bx)e^{3x} + 9bx^2e^{3x} = e^{3x}$$
$$\iff 2b = 1 \iff b = \frac{1}{2}$$

Une solution particulière de (E_2) est $y_2 : x \mapsto \frac{x^2}{2}e^{3x}$.

D'après le principe de superposition des solutions, une solution de (E) est donc $y_p(x) = y_1(x) + y_2(x) = e^{2x} + \frac{x^2}{2}e^{3x}$.
L'ensemble des solutions de (E) est donc :

$$\boxed{\mathscr{S} = \left\{x \mapsto e^{2x} + (\lambda + \mu x + \frac{x^2}{2})e^3x \mid (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2\right\}}$$

3. (a) Pour $x \neq 0$, $1 - e^{-x} \neq 0$ donc l'équation (H) devient :

$$y'(x) + \frac{1}{1-e^{-x}}y(x) = 0$$

EDL1 homogène dont les solutions sur $\mathbb{R}_+^*$ et les solutions sur $\mathbb{R}_-^*$ sont de la forme : $y(x) = \lambda\exp(-A(x))$ avec :

$$A(x) = \int \frac{1}{1-e^{-x}}dx = \int \frac{e^x}{e^x-1}dx = \ln|e^x - 1|$$

Les solutions sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$ sont donc celles de la forme $x \mapsto \frac{\lambda}{|e^x-1|}$.
Puisque sur $\mathbb{R}_+^*$, $e^x - 1 \geqslant 0$ et sur $\mathbb{R}_-^*$, $e^x - 1 \leqslant 0$, quitte à changer la constante λ par son opposé : les solutions de (H) sur $\mathbb{R}_+^*$ sont toutes les fonctions de la forme :

$$\boxed{x \mapsto \frac{\lambda}{e^x-1} \quad \text{avec} \quad \lambda \in \mathbb{R}}$$

les solutions de (H) sur $\mathbb{R}_-^*$ sont toutes les fonctions de la forme :

$$\boxed{x \mapsto \frac{\lambda}{e^x-1} \quad \text{avec} \quad \lambda \in \mathbb{R}}$$

(b) Cherchons une solution particulière sur $\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$ de

$$y'(x) + \frac{1}{1-e^{-x}}y(x) = \frac{xe^{-x}}{1-e^{-x}}.$$

Par la méthode de variation de la constante elle s'écrit $y_p(x) = \frac{\lambda(x)}{e^x-1}$ avec :

$$\lambda(x) = \int (e^x-1)\times\frac{xe^{-x}}{1-e^{-x}}dx = \int x\,dx = \frac{x^2}{2}$$

Ainsi $y_p(x) = \frac{x^2}{2(e^x-1)}$ est solution particulière de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$. Il découle que les solutions de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ sont toutes les fonctions de la forme :

$$\boxed{x \mapsto \frac{x^2}{2(e^x-1)} + \frac{\lambda}{e^x-1} \quad \text{avec} \quad \lambda \in \mathbb{R}}$$

et que les solutions de (E) sur $\mathbb{R}_-^*$ sont toutes les fonctions de la forme :

$$\boxed{x \mapsto \frac{x^2}{2(e^x-1)} + \frac{\lambda}{e^x-1} \quad \text{avec} \quad \lambda \in \mathbb{R}}.$$

(c) Puisque :

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{e^x-1} = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0^{\pm}}\frac{1}{e^x-1} = \pm\infty$$

Les seules solutions de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$ ayant une limite finie en 0 sont $\boxed{x \mapsto \frac{x^2}{2(e^x-1)} \text{ sur } \mathbb{R}_-^* \text{ et sur } \mathbb{R}_+^* \text{ avec pour limite 0 en 0}}$.

(d) Il découle de la question précédente que la seule fonction continue sur $\mathbb{R}$ qui soit solution de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$ est :

$$f : x \mapsto \begin{cases} f(x) = 0 & \text{si } x = 0 \\ f(x) = \frac{x^2}{2(e^x-1)} & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$$

Pour être une solution de (E) sur $\mathbb{R}$ il faut et il suffit que f soit dérivable et satisfasse (E) aussi en 0.
Pour établir la dérivabilité de f en 0 (elle l'est ailleurs car solution de (E) sur $\mathbb{R}^*$), il s'agit de montrer que son taux d'accroissement en 0 admet une limite finie en 0 :

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{\frac{x^2}{2(e^x-1)} - 0}{x} = \frac{x}{2(e^x-1)} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \frac{1}{2}$$

Ainsi $\underline{f \text{ est dérivable en } 0}$ et $\boxed{f'(0) = \frac{1}{2}}$. Aussi pour $x = 0$:

$$(1-e^{-0})f'(0) + f(0) = 0 = 0 \times e^{-0}$$

Ainsi $\underline{f \text{ est solution de } (E) \text{ sur tout } \mathbb{R}. \text{ C'est l'unique solution de } (E) \text{ sur } \mathbb{R}.}$