Exercice 1

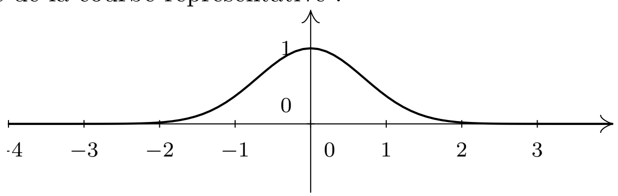
1) a) L'application f est dérivable, et sa dérivée est :

$$f'(x) = -2xe^{-x^2}$$

En particulier $f'(x) \geqslant 0 \iff x \leqslant 0$. D'autre part $\lim_{\pm\infty} f(x) = 0^+$ et $f(0) = 1$, d'où le tableau de variations :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

et l'allure de la courbe représentative :



b) Graphiquement :

– f n'est ni bijective, ni surjective, ni injective,

– $f(\mathbb{R}) =]0, 1]$.

c) Soit $y \in \mathbb{R}$:

$$y = e^{-x^2} \iff -x^2 = \ln(y)$$
$$\iff x^2 = \ln\left(\frac{1}{y}\right)$$

Ainsi l'équation a une solution si et seulement si $\ln\left(\frac{1}{y}\right)$ est bien défini et ≥ 0, si et seulement si $\frac{1}{y} \geq 1$, si et seulement si $y \in]0, 1]$. On obtient finalement :

– Si $y \in]-\infty, 0] \cup]1, +\infty[$: aucune solution.

– Si $y = 1$: une seule solution, $x = 0$.

– Si $y \in]0, 1[$: deux solutions distinctes $x = \pm\sqrt{\ln\left(\frac{1}{y}\right)}$.

d) Justifions les réponses données en 2.b) à l'aide des résultats obtenus en 2.c) ; donné $y \in \mathbb{R}$ les antécédents de y par f sont les solutions de l'équation $y = f(x)$.

– f n'est pas injective : par exemple $\frac{1}{2}$ a deux antécédents : $\pm\sqrt{\ln(2)}$.

– f n'est pas surjective : par exemple 0 n'a aucun antécédent.

– f n'est pas bijective, car ni injective ni surjective.

– $f(\mathbb{R}) =]0, 1]$; ce sont les valeurs du paramètre y pour lesquels l'équation $y = f(x)$ admet au moins une solution.

e) D'après ce qui précède, $f(\mathbb{R}_+) =]0; 1]$ et lorsque $y \in]0; 1]$, l'équation $y = f(x)$ admet pour unique solution dans $\mathbb{R}_+$:

$$\sqrt{\ln\left(\frac{1}{y}\right)}$$

En particulier f réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ dans $J =]0; 1]$, dont la bijection réciproque a pour expression :

$$\forall y \in]0; 1], \ f^{-1}_{|]0;1]}(y) = \sqrt{\ln\left(\frac{1}{y}\right)}.$$

2) a) L'application g est strictement croissante. Elle est donc injective. De plus elle est continue, donc puisque $g(0) = \ln(1) = 0$ et $\lim_{+\infty} g(x) = +\infty$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires :

$$\boxed{g(\mathbb{R}_+) = [0, +\infty[= \mathbb{R}_+}.$$

b) L'application $f \circ g$ est bien définie puisque l'espace de départ de f, $\mathbb{R}$ est identique à l'espace d'arrivée de g. C'est une application de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$.
de plus puisque $g(\mathbb{R}_+) = \mathbb{R}_+$, elle coïncide avec l'application $f_{|\mathbb{R}_+} \circ g$. En particulier c'est une composée d'applications injectives, elle est donc injective.

c) Montrons que $f \circ g$ réalise une bijection sur son image

$$I = f \circ g(\mathbb{R}) = f(g(\mathbb{R}_+)) = f(\mathbb{R}_+) = f_{|\mathbb{R}_+}(\mathbb{R}_+) =]0; 1] = J.$$

Soit $y \in]0;1]$; résolvons l'équation de paramètre y et d'inconnue $x \in \mathbb{R}_+$:

$$\begin{aligned}
& y = f \circ g(x) \\
\Longleftrightarrow\ & y = f(\ln(1+x)) \\
\Longleftrightarrow\ & y = \exp\left(-\ln^2(1+x)\right) \\
\underset{y>0}{\Longleftrightarrow}\ & \ln(y) = -\ln^2(1+x) \\
\Longleftrightarrow\ & \ln^2(1+x) = \ln\left(\frac{1}{y}\right) \\
\Longleftrightarrow\ & \ln(1+x) = \sqrt{\ln\left(\frac{1}{y}\right)} \qquad \text{car } \ln(1+x) \geq 0 \text{ pour } x \in \mathbb{R}_+ \\
\Longleftrightarrow\ & x = e^{\sqrt{\ln\left(\frac{1}{y}\right)}} - 1 \qquad \Longrightarrow \boxed{(f \circ g)^{-1}(y) = e^{\sqrt{\ln\left(\frac{1}{y}\right)}} - 1}
\end{aligned}$$

Exercice 2

1) (a) Pour tout n de $\mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}
\boxed{AX_n} &= \frac{1}{2a+1}\begin{pmatrix} a+1 & a \\ a & a+1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2a+1}\begin{pmatrix} (a+1)u_n + av_n \\ au_n + (a+1)v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = \boxed{X_{n+1}}.
\end{aligned}$$

(b) On démontre par récurrence sur l'entier n de $\mathbb{N}^*$ la propriété $\mathcal{P}(n)$ suivante : "$X_n = A^{n-1}X_1$".

Initialisation : $A^{1-1}X_1 = A^0X_1 = I_2X_1 = X_1$, donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

Hérédité : Soit n dans $\mathbb{N}^*$, montrons que : $[\mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)]$:

On suppose que $X_n = A^{n-1}X_1$.

D'après la question 1.(a), $X_{n+1} = AX_n$, donc $X_{n+1} = A(A^{n-1}X_1)$, or la multiplication matricielle est associative, donc $\underline{X_{n+1}} = (AA^{n-1})X_1 = \underline{A^nX_1}$, ce qui établit $\underline{\mathcal{P}(n+1)}$.

Conclusion : D'après le principe de récurrence, on a ainsi démontré que <u>pour tout n de $\mathbb{N}^*$</u> : $\boxed{X_n = A^{n-1}X_1}$.

2) (a) On analyse les premiers termes : $U^1 = U$, $U^2 = 2U$ et $U^3 = 2^2U$, on conjecture alors la proposition $\mathcal{P}(n)$: "$U^n = 2^{n-1}U$" qu'on prouve par récurrence sur l'entier n de $\mathbb{N}^*$.

Initialisation : $\mathcal{P}(1)$ est vraie car $2^{1-1}U = 2^0U = U = U^1$.

Hérédité : Soit n dans $\mathbb{N}^*$, montrons que : $[\mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)]$:

On suppose que $U^n = 2^{n-1}U$.

On a donc : $\underline{U^{n+1}} = U^nU = 2^{n-1}UU = 2^{n-1}U^2 = 2^{n-1}2U = \underline{2^nU}$, ce qui établit $\underline{\mathcal{P}(n+1)}$.

Conclusion : D'après le principe de récurrence, on a ainsi démontré que <u>pour tout n de $\mathbb{N}^*$</u> : $\boxed{U^n = 2^{n-1}U}$.

(b) De façon évidente : $\boxed{A = \frac{1}{2a+1}(aU+I)}$.

(c) I et aU commutent, donc on peut appliquer la formule du binôme :

<u>pour tout n de $\mathbb{N}$</u>, $A^n = \frac{1}{(2a+1)^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(aU)^kI^{n-k}$,

or $(aU)^k = a^kU^k = \begin{cases} I \text{ si } k=0 \\ a^k2^{k-1}U \text{ si } k \in \mathbb{N}^* \end{cases}$, donc :

$$\begin{aligned}
\boxed{A^n} &= \frac{1}{(2a+1)^n}\left[\binom{n}{0}(aU)^0I + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}a^k2^{k-1}U\right] \\
&= \frac{1}{(2a+1)^n}\left[I + \frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(2a)^kU - U\right)\right] \\
&= \frac{1}{(2a+1)^n}\left[I + \frac{1}{2}(2a+1)^nU - \frac{1}{2}U\right] \\
&= \boxed{\frac{1}{(2a+1)^n}\left[I - \frac{1}{2}U\right] + \frac{1}{2}U}
\end{aligned}$$

(d) $I - \frac{1}{2}U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, donc d'après la question précédente, pour tout n de $\mathbb{N}$:

$$\boxed{A^n = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \frac{1}{(2a+1)^n}+1 & -\frac{1}{(2a+1)^n}+1 \\ -\frac{1}{(2a+1)^n}+1 & \frac{1}{(2a+1)^n}+1 \end{pmatrix}}.$$

3) D'après 1.(b) $X_n = A^{n-1}X_1$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$, donc on obtient, en posant $\alpha_{n-1} = \frac{1}{(2a+1)^{n-1}} + 1$ et $\beta_{n-1} = -\frac{1}{(2a+1)^{n-1}} + 1$:

$$X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \alpha_{n-1} & \beta_{n-1} \\ \beta_{n-1} & \alpha_{n-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \alpha_{n-1}u_1 + \beta_{n-1}v_1 \\ \beta_{n-1}u_1 + \alpha_{n-1}v_1 \end{pmatrix},$$

Autrement dit :

$$\boxed{\left\{\begin{array}{lcl} u_n &=& \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{(2a+1)^{n-1}}+1\right)u_1+\left(-\frac{1}{(2a+1)^{n-1}}+1\right)v_1\right] \\ v_n &=& \frac{1}{2}\left[\left(-\frac{1}{(2a+1)^{n-1}}+1\right)u_1+\left(\frac{1}{(2a+1)^{n-1}}+1\right)v_1\right]\end{array}\right.}$$

ou encore :

$$\boxed{\left\{\begin{array}{lcl} u_n &=& \frac{1}{2}\left(\frac{1}{(2a+1)^{n-1}}(u_1-v_1)+(u_1+v_1)\right) \\ v_n &=& \frac{1}{2}\left(\frac{1}{(2a+1)^{n-1}}(v_1-u_1)+(u_1+v_1)\right)\end{array}\right.}$$

4) *Inversibilité.*

(a) La matrice $A=\dfrac{1}{2a+1}\begin{pmatrix} a+1 & a \\ a & a+1\end{pmatrix}$ est inversible si et seulement si $\dfrac{1}{(2a+1)^2}\left((a+1)^2-a^2\right)$ est non nul autrement dit $\dfrac{2a+1}{(2a+1)^2}$, soit $\dfrac{1}{2a+1}$ est non nul, ce qui est bien le cas, vu son expression. Ainsi A est inversible.

Puisque une puissance d'une matrice inversible est inversible, pour tout entier $n\in\mathbb{N}$, A^n est inversible.

(b) Afin de mener à bien cette vérification, il suffit de multiplier A^n par la matrice dont l'expression est obtenue en remplaçant, dans l'expression de A^n, n par $-n$, et de constater qu'on obtient bien I_2, la matrice identité.

(c) On a d'après 1.b), $X_n=A^{n-1}X_1$. Puisque A^{n-1} est inversible, en multipliant à gauche par $A^{-(n-1)}$:

$$A^{-(n-1)}X_n=A^{-(n-1)}A^{n-1}X_1=I_2X_1=X_1$$

En particulier lorsque $X_n=\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}$, il existe des premiers termes u_1 et v_1 donnés par

$$\begin{pmatrix}u_1\\ v_1\end{pmatrix}=A^{-(n-1)}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}$$

tels que $u_n=\alpha$ et $v_n=\beta$. Pour obtenir u_1 et v_1 il suffit d'effectuer le produit matriciel :

$$\begin{pmatrix}u_1\\ v_1\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}(2a+1)^{n-1}+1 & -(2a+1)^{n-1}+1\\ -(2a+1)^{n-1}+1 & (2a+1)^{n-1}+1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}$$
$$=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}(2a+1)^{n-1}(\alpha-\beta)+(\alpha+\beta)\\ (2a+1)^{n-1}(\beta-\alpha)+(\alpha+\beta)\end{pmatrix}$$

Ainsi les valeurs de u_1 et v_1 qui conviennent sont :

$$\boxed{\left\{\begin{array}{l} u_1=(2a+1)^{n-1}\times\dfrac{\alpha-\beta}{2}+\dfrac{\alpha+\beta}{2}\\ v_1=(2a+1)^{n-1}\times\dfrac{\beta-\alpha}{2}+\dfrac{\alpha+\beta}{2}\end{array}\right.}$$

Exercice 3

1. (a) Code Python de la fonction `P(x,n)` :

```
def P(x,n):
    p = n * x**n - 1
    for k in range(1,n):
        p = p - x**k
    return p
```

(b) Code Python de la fonction `estRacine(x,n)` :

```
def estRacine(x,n):
    if P(x,n) == 0:
        print(x,"est une racine de P")
    else:
        print(x,"n'est pas racine de P")
```

2. Par le calcul direct :
$\boxed{Q(X)=}\,P(X)-XP(X)=nX^n-X^{n-1}-X^{n-2}-\cdots-X-1-nX^{n+1}+X^n+X^{n-1}+\cdots+X^2+X=nX^n-1-nX^{n+1}+X^n=\boxed{-nX^{n+1}+(n+1)X^n-1}$

3. (a) $Q(X) = (1 - X)P(X)$ donc $Q'(X) = -P(X) + (1 - X)P'(X)$.
x_0 étant une racine multiple de P, on a $P(x_0) = P'(x_0) = 0$, par conséquent

$$\boxed{Q'(x_0) = -\underbrace{P(x_0)}_{=0} + (1 - x_0)\underbrace{P'(x_0)}_{=0} = 0}.$$

(b) D'après la question (2), $Q'(X) = -n(n+1)X^n + (n+1)nX^{n-1} = n(n+1)X^{n-1}(-X+1)$.
D'après la question (a), $Q'(x_0) = 0$ donc $x_0^{n-1}(-x_0 + 1) = 0$ par conséquent $\boxed{x_0 = 0 \text{ ou } x_0 = 1}$.

(c) $\boxed{P(0) = -1}$ et $P'(X) = n^2X^{n-1} - (n-1)X^{n-2} - (n-2)X^{n-3} - \cdots - 3X^2 - 2X - 1$ donc $P'(1) = n^2 - (n-1) - (n-2) - \cdots - 3 - 2 - 1 = n^2 - \sum_{k=1}^{n-1} k = n^2 - \frac{(n-1)n}{2} = \frac{n}{2}(2n - (n-1))$. $\boxed{P'(1) = \frac{n(n+1)}{2}}$.
En particulier on voit que $P(0) \neq 0$ et $P'(1) \neq 0$ donc
$\boxed{\text{0 et 1 ne sont pas des racines multiples de } P.}$
D'après la question précédente x_0 n'est pas une racine multiple, ce qui est en contradiction avec l'hypothèse du début de la question 3.
On vient de démontrer par l'absurde que P n'a aucune racine multiple donc $\boxed{\text{toutes les racines de } P \text{ sont simples.}}$

4. On sait qu'un polynôme de degré n a exactement n racines complexes comptées avec leur ordre de multiplicité.
Comme toutes les racines de P sont simples et que $\deg P = n$, $\boxed{P \text{ a } n \text{ racines complexes distinctes.}}$

5. $P(1) = n - \underbrace{1 - 1 - \cdots - 1}_{n \text{ termes}} = n - n = 0$ donc $P(X)$ est factorisable par $X - 1$, autrement dit, il existe un polynôme H tel que $P(X) = (X-1)H(X)$.
On a $n = \deg P(X) = \deg(X-1)H(X) = \deg(X-1) + \deg H(X) = 1 + \deg H(X)$ donc $deg(H) = n - 1$. On peut donc écrire

$$H(X) = a_{n-1}X^{n-1} + a_{n-2}X^{n-2} + \cdots + a_1X + a_0.$$

Dans l'égalité $nX^n - X^{n-1} - X^{n-2} - \cdots - X - 1 = (X-1)(a_{n-1}X^{n-1} + a_{n-2}X^{n-2} + \cdots + a_2X^2 + a_1X + a_0)$ on identifie les monômes de même degré en commençant par le terme de plus haut degré :

$$\begin{cases} a_{n-1} = n \\ a_{n-2} - a_{n-1} = -1 \\ a_{n-3} - a_{n-2} = -1 \\ \vdots \\ a_1 - a_2 = -1 \\ a_0 - a_1 = -1 \\ -a_0 = -1 \end{cases} \underset{\text{par substitutions descendantes}}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} a_{n-1} = n \\ a_{n-2} = n-1 \\ a_{n-3} = n-2 \\ \vdots \\ a_1 = 2 \\ a_0 = 1 \\ -1 = -1 \end{cases}$$

$H(X) = nX^{n-1} + (n-1)X^{n-2} + \cdots + +2X + 1$
$Q(X) = (1-X)P(X) = (1-X)(X-1)H(X) = (X-1)^2(-H(X))$.
On a $\boxed{Q(X) = (X-1)^2R(X)}$

où $\boxed{R(X) = -\sum_{r=0}^{n-1}(r+1)X^r = -nX^{n-1} - (n-1)X^{n-2} - \cdots - 2X - 1}$