Lycée Fénelon
Année 2020-21

BCPST1

Mathématiques
Devoir surveillé n° 5

Samedi 6 février 2021

Durée : 2 heures 30 minutes

Qualité de la rédaction, clarté des raisonnements, présentation, orthographe et ponctuation font partie des critères de notation.

Il est vivement recommandé de lire attentivement les questions, d'*encadrer les résultats* et de signaler clairement toute question admise.

Une partie de la notation sera attribuée à la présentation et lisibilité de la copie, à ce que les résultats soient encadrés proprement, à la règle et en couleur, ainsi qu'à la clarté de tous les raisonnements et calculs.

L'usage des calculatrices est interdit.

Exercice 1. *Applications réelles*

1) Soit l'application :

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & e^{-x^2} \end{array} \right.$$

a) Dresser le tableau de variation de f et tracer sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé.

b) Répondre sans justification aux questions suivantes :

f est-elle injective ? f est-elle surjective ? f est-elle bijective ? Quelle est l'image directe $f(\mathbb{R})$ de f ?

c) Résoudre l'équation $y = f(x)$ de paramètre $y \in \mathbb{R}$ et d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

d) En déduire les justifications de toutes les réponses données à la question 2.b.

e) Justifier que la restriction $f_{|\mathbb{R}_+}$, de l'application f à $\mathbb{R}_+$, réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ vers un intervalle J que l'on déterminera, et donner l'expression analytique de sa bijection réciproque $f_{|\mathbb{R}_+}^{-1} : J \longrightarrow \mathbb{R}_+$.

2) Soit l'application :

$$g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ln(1+x) \end{array} \right.$$

a) Montrer que g est injective, et déterminer son image directe $g(\mathbb{R}_+)$.

b) Justifier que l'application composée $f \circ g$ est bien définie et que $f \circ g = f_{|\mathbb{R}_+} \circ g$; en déduire que $f \circ g$ est injective.

c) Montrer que $f \circ g$ réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ vers un intervalle I que l'on déterminera, et donner l'expression analytique de sa bijection réciproque définie sur I.

Exercice 2. *Matrices et suites couplées.*

On souhaite déterminer l'expression des termes d'indices n des suites couplées (u_n) et (v_n) définies par la donnée de leur premier terme u_1 et v_1 et par la relation :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{1}{2a+1}\big((a+1)u_n + av_n\big) \\ v_{n+1} = \dfrac{1}{2a+1}\big(au_n + (a+1)v_n\big) \end{cases}$$

où a est un réel différent de $-\dfrac{1}{2}$.

Soit $A = \dfrac{1}{2a+1}\begin{pmatrix} a+1 & a \\ a & a+1 \end{pmatrix}$ et $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$

1. (a) Démontrer que pour tout n dans $\mathbb{N}^*$: $X_{n+1} = AX_n$.
   (b) Déduire, par récurrence, l'expression de X_n en fonction d'une puissance de A et de X_1.
2. On pose $U = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
   (a) Soit k un entier naturel non nul. Exprimer plus simplement U^k en fonction de U et k.
   (b) Exprimer A en fonction de a, U et I.
   (c) i. En déduire, pour tout entier naturel n, l'expression de A^n sous forme de somme et en fonction des entiers a et n, et des puissances de U.
   ii. Après avoir rappelé la définition de U^0, exprimer A^n en fonction des matrices U et I seulement et des entiers a et n.
   (d) Puis établir à l'aide de la question précédente que

$$A^n = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \dfrac{1}{(2a+1)^n} + 1 & -\dfrac{1}{(2a+1)^n} + 1 \\ -\dfrac{1}{(2a+1)^n} + 1 & \dfrac{1}{(2a+1)^n} + 1 \end{pmatrix}.$$

3. En déduire les expressions de u_n et v_n en fonction de l'entier n et des deux réels u_1 et v_1.
4. *Inverse de A^n.*

(a) Calculer le déterminant de la matrice A ; en déduire que A est inversible. Peut-on en déduire que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, A^n est inversible ?

(b) Vérifier que l'inverse de A^n s'obtient en remplaçant l'entier n par son opposé $-n$ dans l'expression de A^n. (Épatant, non ?)

(c) Étant donnés un entier $n \in \mathbb{N}$ et deux réels quelconques α et β, peut-on trouver les premiers termes u_1 et v_1 des suites (u_n) et (v_n) tels que $u_n = \alpha$ et $v_n = \beta$? Si oui, exprimer u_1 et v_1 en fonction de α, β, a et n.

Exercice 3 *Détermination de l'ordre de multiplicité des racines d'un polynôme de degré n*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $P(X) = nX^n - X^{n-1} - X^{n-2} - \cdots - X - 1$ et $Q(X) = (1-X)P(X)$.

1. *Informatique.*

   (a) Écrire en Python une fonction `P(x,n)` prenant en paramètre un nombre `x` et l'entier `n` et qui renvoie la valeur $P(x)$ du polynôme P en x.

   (b) Écrire en Python une fonction `estRacineP(x,n)` prenant en paramètre un nombre `x` et l'entier `n` et qui écrit dans la console une phrase indiquant si oui ou non x est une racine du polynôme P.

2. Montrer que $Q(X) = -nX^{n+1} + (n+1)X^n - 1$.

3. On suppose que x_0 est une racine multiple de P.

   (a) Justifier que $Q'(x_0) = 0$.

   (b) En déduire que $x_0 = 0$ ou $x_0 = 1$.

   (c) Calculer $P(0)$ et $P'(1)$ et en déduire une contradiction. Que peut-on en conclure ?

4. Combien le polynôme P possède-t-il de racines distinctes dans $\mathbb{C}$?

5. Montrer que $Q(X) = (X-1)^2 R(X)$ où R est un polynôme que l'on déterminera.