Lycée Fénelon BCPST1
Année 2021-22

Mathématiques
Devoir surveillé n° 5

Samedi 12 février 2022

Durée : 2 heures 30 minutes

Qualité de la rédaction, clarté des raisonnements, présentation, orthographe et ponctuation font partie des critères de notation.

Il est vivement recommandé de lire attentivement les questions, d'*encadrer les résultats* et de signaler clairement toute question admise.

Une partie de la notation sera attribuée à la présentation de la copie, à ce que les résultats soient encadrés proprement, à la règle et en couleur, ainsi qu'à la clarté de tous les raisonnements et calculs.

L'usage des calculatrices et des téléphones portables est rigoureusement interdit.

Exercice 1. *Factorisation d'un polynôme de degré 4*

Soit $P(X) = X^4 + 3X^3 + X^2 + 4$.

1. Déterminer le polynôme dérivé P' de P.
2. Après avoir trouvé une racine évidente de P', trouver toutes les racines de P'.
3. Déterminer une racine multiple x_0 de P.
4. Trouver un polynôme Q tel que $P(X) = (X - x_0)^2 Q(X)$.
5. En déduire les autres racines de P puis les mettre sous forme exponentielle.
6. Factoriser P dans $\mathbb{C}[X]$.

Exercice 2. *Injection, surjection, bijection*

1. Donner l'ensemble de définition et étudier le signe sur $\mathbb{R}$ de $\dfrac{1-y}{1+y}$.

   Pour quelles valeurs du réel y a-t-on $\dfrac{1-y}{1+y} > 0$?
2. Soit l'application :
$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1-e^x}{1+e^x} \end{array}$$
   (a) Dresser le tableau de variation de f et tracer sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé.

(b) Répondre sans justification aux questions suivantes :

f est-elle injective ? f est-elle surjective ? f est-elle bijective ? Quelle est l'image directe $f(\mathbb{R})$ de f ?

(c) Résoudre l'équation $y = f(x)$ de paramètre $y \in \mathbb{R}$ et d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

(d) En déduire les justifications de toutes les réponses données à la question 2.b.

(e) Trouver un intervalle J pour lequel l'application :

$$\begin{array}{rccl} \overline{f}: & \mathbb{R} & \longrightarrow & J \\ & x & \longmapsto & f(x) = \dfrac{1-e^x}{1+e^x} \end{array}$$

soit bijective, et déterminer son application réciproque $\overline{f}^{-1}$.

Exercice 3. *Matrice semblable à une matrice diagonale.*

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

1. Justifier que la matrice P est inversible et calculer son inverse.
2. Déterminer la matrice $D = P^{-1}AP$. Montrer que D est inversible et expliciter les coefficients de D^{-1}.
3. Exprimer A en fonction de P, D et P^{-1}. En déduire que A est inversible et expliciter les coefficients de A^{-1}.
4. En déduire les solutions du système $(S)\left\{\begin{array}{l} x-2y+2z=2 \\ -x+z=4 \\ x-y+2z=0 \end{array}\right.$
5. Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, A^n = PD^nP^{-1}$.

   Justifier que A^n est inversible et exprimer A^{-n} en fonction de P, P^{-1} et D^{-n} pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   Expliciter les coefficients de A^n pour tout $n \in \mathbb{Z}$.
6. On considère trois suites a, b et c telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left\{\begin{array}{l} a_{n+1} = a_n - 2b_n + 2c_n \\ b_{n+1} = -a_n + c_n \\ c_{n+1} = a_n - b_n + 2c_n \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{r} a_0 = 2 \\ b_0 = 0 \\ c_0 = -2 \end{array}\right. \text{.On pose } X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}.$$

   (a) Vérifier que $\forall n \in \mathbb{N},\ X_{n+1} = AX_n$ puis que $\forall n \in \mathbb{N},\ X_n = A^nX_0$.

   (b) En déduire l'expression des suites $(a_n)_n$, $(b_n)_n$ et $(c_n)_n$ en fonction de n.

Exercice 4. *Matrice vérifiant $A^2 = \alpha.A + \beta.I$.*

Soit $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ et $A = J_n - I_n$, où J_n est la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1 et I_n est la matrice identité.

1. Exprimer J_n^2 en fonction de J_n puis A^2 en fonction de J_n et I_n. En déduire que $A^2 = (n-2)\,A + (n-1)\,I_n$.
2. En déduire l'inversibilité de A et exprimer A^{-1} en fonction de A, I_n et n.
3. Montrer que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, il existe deux réels α_p et β_p tels que $A^p = \alpha_p A + \beta_p I_n$. Exprimer α_p et β_p en fonction de p.
4. À l'aide de la formule du binôme de Newton, exprimer A^p pour $p \in \mathbb{N}^*$ en fonction de I_n, J_n et p.
5. La relation de la question précédente est-elle valable pour pour $p = -1$?
6. Déduire des questions précédentes la résolution du système $(S)\begin{cases} y + z = 1 \\ x + z = -1 \\ x + y = 2 \end{cases}$
7. Dans cette question on considère les suites (x_n), (y_n) et (z_n) définies par $x_0 = y_0 = 0$, $z_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $\begin{cases} x_{n+1} = y_n + z_n \\ y_{n+1} = x_n + z_n \\ z_{n+1} = x_n + y_n \end{cases}$.
   (a) Écrire en Python une fonction `suiteXn(n)` prenant en paramètre un entier positif `n` et qui renvoie le terme x_n de rang n de la suite (x_n).
   (b) Déterminer les expressions de x_n, y_n et z_n en fonction de n.