Exercice 1

1) Par définition du polynôme dérivé :

$$\boxed{P' = 4X^3 + 9X^2 + 2X}$$

2) Puisque 0 est une racine évidente, X factorise P', ainsi : $P' = X(aX^2 + bX + c)$. En considérant le coefficient dominant de P' : $a = 4$. En considérant le coefficient de degré 2 de P' : $b = 9$. Finalement en considérant le coefficient de degré 1 de P' : $c = 2$. Ainsi :

$$P' = X(4X^2 + 9X + 2)$$

Cherchons les racines du trinôme $4X^2+9X+2$: le discriminant est $\Delta = 9^2-4\times4\times2 = 81-32 = 49 = 7^2$. Ainsi les deux autres racines de P' sont :

$$x_1 = \frac{-9-7}{2\times 4} = -\frac{16}{8} = \boxed{-2} \qquad x_2 = \frac{-9+7}{2\times 4} = -\frac{2}{8} = \boxed{-\frac{1}{4}}$$

En conclusion, P' a pour racines les 3 réels $\boxed{0, -2, -\frac{1}{4}}$.

3) Une racine multiple de P est racine de P et de P'. Ce ne peut donc être que $0, -2$ ou $-\frac{1}{4}$. Or :

$$P(0) = 4 \quad ; \quad P(-2) = 16 - 24 + 4 + 4 = 0$$
$$P(-1/4) = \frac{1}{4^4} - \frac{3}{4^3} + \frac{1}{4^2} + 4 = \frac{1 - 12 + 16 + 4^4}{4^4} > 0$$

Donc la seule racine multiple de P est $\boxed{x_0 = -2}$.

4) Puisque -2 est racine multiple de P, le polynôme P est factorisable par $(X+2)^2$, c'est-à-dire qu'il existe un polynôme Q tel que $P(X) = (X+2)^2Q(X) = (X^2+4X+4)Q(X)$.
On a $4 = \deg P = \deg(X^2+4X+4) + \deg Q$ donc $\deg Q = 2$. En raisonnant sur les termes constants et les coefficients dominant, on voit que Q est de la forme $X^2 + aX + 1$.
En développant $(X^2+4X+4)(X^2+aX+1)$ et en identifiant les coefficients de X (dans ce produit et dans P), on trouve $0 = 4a + 4$ donc $a = -1$. $\boxed{P(X) = (X+2)^2(X^2 - X + 1)}$.

5) Le polynôme $X^2 - X + 1$ a pour racines $\frac{1-i\sqrt{3}}{2}$ et $\frac{1+i\sqrt{3}}{2}$ donc $X^2 - X + 1 = \left(X - \frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)\left(X - \frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)$.

> Les racines de P sont -2 d'ordre de multiplicité 2 et $\frac{1-i\sqrt{3}}{2}$, $\frac{1+i\sqrt{3}}{2}$ d'ordres de multiplicité 1.

Ces deux dernières racines ont pour écriture sous forme exponentielle :

$$\boxed{\frac{1-i\sqrt{3}}{2} = e^{-\frac{i\pi}{3}}, \quad \frac{1+i\sqrt{3}}{2} = e^{\frac{i\pi}{3}}}$$

6) On en déduit la factorisation de P dans $\mathbb{C}[X]$:

$$\boxed{P = X^4 + 3X^3 + X^2 + 4 = (X+2)^2\left(X - e^{\frac{i\pi}{3}}\right)\left(X - e^{\frac{-i\pi}{3}}\right)}$$

Exercice 2

1) Le quotient est défini pour tout $y \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Dressons son tableau de signe :

y	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$(1-y)$		$+$		$+$	0	$-$	
$(1+y)$		$-$	0	$+$		$+$	
$\frac{1-y}{1+y}$		$-$	$\|\|$	$+$	0	$-$	

Ainsi :

$$\frac{1-y}{1+y} \text{ est } \begin{cases} \geqslant 0 & \text{ssi } x \in]-1, 1] \\ \leqslant 0 & \text{ssi } x \in]-\infty, -1[\cup [1, +\infty[\end{cases}$$

et $\boxed{\frac{1-y}{1+y} > 0 \iff y \in]-1; 1[}$.

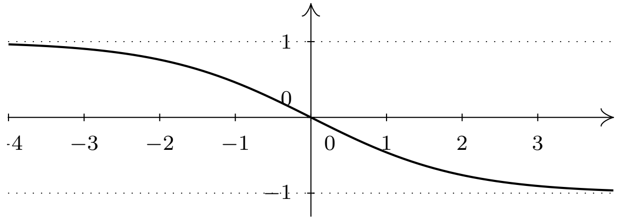
2) a) L'application f est dérivable, et sa dérivée est :

$$f'(x) = \frac{-e^x(1+e^x) - e^x(1+e^x)}{(1+e^x)^2} = \frac{-2e^x}{(1+e^x)^2} < 0$$

En particulier $f'(x) < 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. D'autre part $\lim_{-\infty} f(x) = 1$, $\lim_{+\infty} f(x) = -1$ et $f(0) = 0$, d'où le tableau de variations :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$		$-$
f	1 ↘	0 ↘	-1

et l'allure de la courbe représentative :



b) Graphiquement :

- f est injective, et ni surjective, ni bijective,
- $f(\mathbb{R}) =]-1;1[$.

c) Soit $y \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
y = \frac{1-e^x}{1+e^x} &\iff y(1+e^x) = 1-e^x \\
&\iff e^x(1+y) = 1-y \\
&\iff \begin{cases} e^x = \dfrac{1-y}{1+y} & \text{si } y \neq -1 \\ 0 = 2 & \text{si } y = -1 \text{ impossible} \end{cases} \\
&\iff x = \ln\left(\frac{1-y}{1+y}\right) \qquad \text{si } y \neq -1 \text{ et } \frac{1-y}{1+y} > 0 \\
&\underset{1)}{\iff} x = \ln\left(\frac{1-y}{1+y}\right) \qquad \text{si } y \in]-1;1[
\end{aligned}$$

Ainsi d'après 1) l'équation a une solution si et seulement si $y \in]-1;1[$, qui plus est unique. On obtient finalement :

– Si $y \in]-\infty,-1] \cup]1,+\infty[$: aucune solution.

– Si $y \in]-1,1[$: une solution unique $x = \ln\left(\dfrac{1-y}{1+y}\right)$.

d) Justifions les réponses données en 2.b) à l'aide des résultats obtenus en 2.c) ; donné $y \in \mathbb{R}$ les antécédents de y par f sont les solutions de l'équation $y = f(x)$.
– f est injective : tout $y \in \mathbb{R}$ admet au plus un antécédent par f.
– f n'est pas surjective : par exemple 1 n'a aucun antécédent.
– f n'est pas bijective, car ni injective ni surjective.
– $f(\mathbb{R}) =]-1,1[$; ce sont les valeurs du paramètre y pour lesquels l'équation $y = f(x)$ admet au moins une solution.

e) En choisissant $J =]-1;1[$, l'équation $y = \overline{f}(x) \iff y = f(x)$ admet une unique solution lorsque $y \in J =]-1;1[$, solution $x = \ln\left(\dfrac{1-y}{1+y}\right)$. Ainsi l'application :

$$\boxed{\begin{array}{rcl} \overline{f} : \mathbb{R} & \longrightarrow &]-1;1[\\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}}$$

est bijective, et admet comme application réciproque :

$$\boxed{\begin{array}{rcl} \overline{f}^{-1} :]-1;1[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ y & \longmapsto & \ln\left(\dfrac{1-y}{1+y}\right) \end{array}}$$

Exercice 3

1. On résout le système (S) $\begin{cases} x_1 + x_2 = y_1 \\ x_1 + x_3 = y_2 \\ x_2 + x_3 = y_3 \end{cases}$ et l'on trouve comme unique solution $\begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}y_1 + \frac{1}{2}y_2 - \frac{1}{2}y_3 \\ x_2 = \frac{1}{2}y_1 - \frac{1}{2}y_2 + \frac{1}{2}y_3 \\ x_3 = -\frac{1}{2}y_1 + \frac{1}{2}y_2 + \frac{1}{2}y_3 \end{cases}$ donc $\boxed{P \text{ est inversible}}$ et

$$\boxed{P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}$$

2. En effectuant deux produits matriciels, on trouve

$\boxed{D = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$ qui est une matrice diagonale dont tous les coefficients diagonaux sont non nuls donc $\boxed{D \text{ est inversible et } D^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$

3. On multiplie les deux membres de l'égalité $D = P^{-1}AP$ par P à gauche et par P^{-1} à droite : $PDP^{-1} = \underbrace{PP^{-1}}_{I_3} A \underbrace{PP^{-1}}_{I_3} = A$ on a donc $\boxed{A = PDP^{-1}}$.

   $\boxed{\text{La matrice } A \text{ est inversible comme produit de trois matrices inversibles.}}$

   $A^{-1} = \left(PDP^{-1}\right)^{-1} = \left(P^{-1}\right)^{-1} D^{-1} P^{-1}$ (bien penser à changer l'ordre des facteurs) donc $A^{-1} = PD^{-1}P^{-1}$.

   En effectuant deux produits matriciels, on trouve $\boxed{A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -3 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}}$

4. L'écriture matricielle de ce système est $AX = B$ avec $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$.

   La matrice A étant inversible, le système admet comme unique solution $A^{-1}B = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -3 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{10}{3} \\ -2 \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$.

   $\boxed{\text{L'unique solution du système } \begin{cases} x - 2y + 2z = 2 \\ -x + z = 4 \\ x - y + 2z = 0 \end{cases} \text{ est le triplet } \left(-\frac{10}{3}, -2, \frac{2}{3}\right).}$

5. *Initialisation.*
   $A^0 = I_3$ par définition.
   $PD^0P^{-1} = PI_3P^{-1} = PP^{-1} = I_3$.
   L'égalité est vérifiée au rang 0.

   Hérédité.
   Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $A^n = PD^nP^{-1}$ (HR).
   $A^{n+1} = AA^n = PDP^{-1}PD^nP^{-1}$ d'après la question 3 et l'hypothèse de récurrence.
   $A^{n+1} = PDI_3D^nP^{-1} = PD^{n+1}P^{-1}$ d'où l'égalité au rang $n+1$.
   On vient de démontrer que l'égalité est héréditaire.

   Conclusion. D'après le principe de récurrence, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = PD^nP^{-1}}$.

6. (a) $AX_n = \begin{pmatrix} a_n - 2b_n + 2c_n \\ -a_n + c_n \\ a_n - b_n + 2c_n \end{pmatrix}$ donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ X_{n+1} = AX_n}$

   Démontrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N},\ X_n = A^nX_0$.

   Initialisation. $A^0X_0 = I_3X_0 = X_0$ donc l'égalité est vérifiée au rang 0.

   Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $X_n = A^nX_0$ (HR).
   $X_{n+1} = AX_n = AA^nX_0 = A^{n+1}X_0$ donc l'égalité est vraie au rang $n+1$.

   Conclusion. $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ X_n = A^nX_0}$

   (b) Puisque D est une matrice diagonale : $D^n = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 3^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

   D'après la question 5, $A^n = PD^nP^{-1}$. En effectuant deux produits matriciels, on trouve : $A^n = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} (-1)^n + 3^n & (-1)^n - 3^n & -(-1)^n + 3^n \\ (-1)^n - 1 & (-1)^n + 1 & -(-1)^n + 1 \\ -1 + 3^n & 1 - 3^n & 1 + 3^n \end{pmatrix}$

   D'après la question précédente $X_n = A^nX_0$ avec $X_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$. Après calcul, on trouve $X_n = \begin{pmatrix} 2(-1)^n \\ 2(-1)^n - 2 \\ -2 \end{pmatrix}$, on a alors :

   $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = 2(-1)^n,\ b_n = 2(-1)^n - 2,\ c_n = -2}$

Exercice 4

1. On peut conjecturer en calculant J_n^2 pour de petites valeurs de n ($n = 2, 3$) que $J_n^2 = n.J_n$. Démontrons-le.
   Soit $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$; le coefficient ligne i colonne j de J_n^2 est donnée par la formule du produit matriciel :

$$(J_n^2)_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} (J_n)_{i,k} \times (J_n)_{k,j} = \sum_{k=1}^{n} 1 \times 1 = n$$

   Ainsi tous les coefficients de J_n^2 sont égaux à n. On a donc :

$$\boxed{J_n^2 = n.J_n}$$

Pour le calcul de A^2, puisque J_n et I_n commutent, on peut appliquer la formule du binôme :

$$A^2 = (J_n - I_n)^2 = J_n^2 - 2J_n \times I_n + I_n^2 = n.J_n - 2J_n + I_n = \boxed{(n-2).J_n + I_n = A^2}$$

Mais puisque $A = J_n - I_n$:

$$(n-2)A + (n-1)I_n = (n-2)J_n - (n-2)I_n + (n-1)I_n = (n-2)J_n + I_n = A^2$$

Ainsi $\boxed{A^2 = (n-2)A + (n-1)I_n}$.

2. Il découle de $A^2 = (n-2)A + (n-1)I_n$ que $A \times \dfrac{1}{n-1}(A - (n-2)I_n) = I_n$. On en déduit que A est inversible et que $\boxed{A^{-1} = \dfrac{1}{n-1}(A - (n-2)I_n)}$.

3. Commençons par démontrer par récurrence l'existence de α_p et β_p tels que $A^p = \alpha_p A + \beta_p I_n$ tout en établissant une relation de récurrence pour les suites (α_p) et (β_p).

Initialisation. Pour $n = 0$ l'égalité est vérifiée pour $\alpha_0 = 0$ et $\beta_0 = 1$.

Hérédité. Supposons l'égalité vérifiée au rang $p \in \mathbb{N}$ fixé. Alors :

$$A^{p+1} = A^p \times A \underset{HR}{=} (\alpha_p A + \beta_p I_n) \times A = \alpha_p A^2 + b_p A \underset{1)}{=} \alpha_p((n-2)A + (n-1)I_n) + \beta_p A$$
$$= \underbrace{((n-2)\alpha_p + \beta_p)}_{\alpha_{p+1}} A + \underbrace{(n-1)\alpha_p}_{\beta_{p+1}} I_n$$

L'égalité reste donc vraie au rang $n+1$. On conclut d'après le principe de récurrence.
Reste à donner les expressions de α_p et β_p en fonction de p. Les suites (α_p) et (β_p) sont définies par :

$$\begin{cases} \alpha_0 = 0 \\ \beta_0 = 1 \end{cases} \quad \text{et } \forall\, p \in \mathbb{N}, \ \begin{cases} \alpha_{p+1} = (n-2)\alpha_p + \beta_p \\ \beta_{p+1} = (n-1)\alpha_p \end{cases}$$

On en déduit :

$$\beta_{p+2} = (n-1)\alpha_{p+1} = (n-1)(n-2)\alpha_p + (n-1)\beta_p = (n-2)\beta_{p+1} + (n-1)\beta_p$$

et n étant fixé, la suite (β_p) est récurrente linéaire d'ordre 2. L'équation caractéristique associée est $(EC) \ : \ r^2 + (2-n)r + (1-n)$. Elle a pour racines évidentes $(n-1)$ et (-1) (car $P = (n-1) \times (-1) = (1-n)$ et $S = n - 1 + (-1) = n - 2 = -(2-n)$). Ainsi il existe deux réels A et B tels que pour tout $p \in \mathbb{N}$: $\beta_p = A(n-1)^p + B(-1)^p$. Or $\beta_0 = 1$ et $\beta_1 = (n-1) \times \alpha_0 = 0$ donc :

$$\begin{cases} \beta_0 = A + B = 1 \\ \beta_1 = (n-1)A - B = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} B = 1 - A \\ nA - 1 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} A = \dfrac{1}{n} \\ B = \dfrac{n-1}{n} \end{cases}$$

Ainsi pour tout $p \in \mathbb{N}$: $\boxed{\beta_p = \dfrac{1}{n}(n-1)^p + \dfrac{n-1}{n}(-1)^p}$. Et donc, pour tout $p \in \mathbb{N}$:

$$\alpha_p = \frac{1}{n-1}\beta_{p+1} = \boxed{\frac{1}{n}(n-1)^p - \frac{1}{n}(-1)^p = \alpha_p}.$$

4. D'une part I_n et J_n commutent ; on peut donc appliquer la formule du binôme de Newton au développement de $A^p = (J_n - I_n)^p$.
D'autre part $(J_n)^2 = n.J_n$, $(J_n)^3 = (J_n)^2 \times J_n = n.J_n^2 = n^2.J_n$; établissons par récurrence que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $J_n^k = n^{k-1}J_n$.
Initialisation. Pour $n = 1$: l'égalité est vérifiée.
Hérédité. Supposons l'égalité vraie au rang $k \geqslant 1$;

$$(J_n)^{k+1} = (J_n)^k \times J_n \underset{HR}{=} n^{k-1}J_n \times J_n = n^{k-1}J_n^2 \underset{1)}{=} n^{k-1} \times n.J_n = n^k J_n.$$

On conclut avec le principe de récurrence.

On applique la formule du binôme de Newton ; pour $p \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} A^p &= (J_n - I_n)^p \\ &= \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} J_n^k \times (-1)^{p-k}.I_n^{p-k} \\ &= \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} (-1)^{p-k} J_n^k \\ &= (-1)^p I_n + \left(\sum_{k=1}^{p} \binom{p}{k} (-1)^{p-k} n^{k-1} \right) .J_n \\ &= (-1)^p I_n + \frac{1}{n} \left(\sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} (-1)^{p-k} n^k - (-1)^p \right) .J_n \\ &= \boxed{(-1)^p I_n + \frac{(n-1)^p - (-1)^p}{n}.J_n = A^p} \end{aligned}$$

5. Pour $p = -1$ la relation deviendrait après simplification :$A^{-1} = \frac{1}{n-1}.J_n - I_n$.
Alors, on aurait :

$$\begin{aligned} I_n = A^{-1} \times A &= \left(\frac{1}{n-1}.J_n - I_n\right)(J_n - I_n) = \frac{1}{n-1}J_n^2 - J_n - \frac{1}{n-1}J_n + I_n \\ &= \frac{n}{n-1}J_n - \frac{n}{n-1}J_n + I_n = I_n \end{aligned}$$

C'est bien le cas. Ainsi l'égalité demeure vraie pour $p = -1$:

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{n-1}.J_n - I_n}.$$

6. En notant $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, le système s'écrit sous forme matricielle $AX = B$ avec $n = 3$. Puisque A est inversible, le système admet pour unique solution : $X = A^{-1}B$, soit :

$$X = \left(\frac{1}{2}.J_3 - I_3\right)B = \frac{1}{2}.J_3 \times B - B = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Ainsi :

$$\begin{cases} x = 1 - 1 \\ y = 1 + 1 \\ z = 1 - 2 \end{cases} \Longrightarrow \boxed{\begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \\ z = -1 \end{cases}}$$

7. (a)

```python
def suiteXn(n):
    x, y, z = 0, 0, 1
    for k in range(n):
        X = y + z
        Y = x + z
        Z = x + y
        x, y, z = X, Y, Z
    return x
```

(b) En notant pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$, et $A = J_3 - I_3$, on a la relation de récurrence $X_{n+1} = AX_n$, et par une récurrence immédiate pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = A^n X_0$. Or d'après la question 4 :

$$A^n = (-1)^n I_3 + \frac{2^n - (-1)^n}{3}.J_3 = \begin{pmatrix} \frac{2^n + 2(-1)^n}{3} & \frac{2^n - (-1)^n}{3} & \frac{2^n - (-1)^n}{3} \\ \frac{2^n - (-1)^n}{3} & \frac{2^n + 2(-1)^n}{3} & \frac{2^n - (-1)^n}{3} \\ \frac{2^n - (-1)^n}{3} & \frac{2^n - (-1)^n}{3} & \frac{2^n + 2(-1)^n}{3} \end{pmatrix}$$

On en déduit que :

$$X_n = A^n X_0 = \begin{pmatrix} \frac{2^n - (-1)^n}{3} \\ \frac{2^n - (-1)^n}{3} \\ \frac{2^n + 2(-1)^n}{3} \end{pmatrix} \Longrightarrow \boxed{\begin{cases} x_n = \frac{2^n - (-1)^n}{3} \\ y_n = \frac{2^n - (-1)^n}{3} \\ z_n = \frac{2^n + 2(-1)^n}{3} \end{cases}}$$