Lycée Fénelon
Année 2020-21

BCPST1

Mathématiques
Devoir surveillé n° 6

Samedi 27 mars 2021
Durée : 3 heures 30

Qualité de la rédaction, clarté des raisonnements, présentation, orthographe et ponctuation font partie des critères de notation.
Il est vivement recommandé de lire attentivement les questions, d'*encadrer les résultats* et de signaler clairement toute question admise.
L'usage des calculatrices est ***interdit***.

Exercice 1. *Calcul d'équivalents et de limites.*

Pour chacune des suites de terme général :

$$(1)\quad n\ln\left(\frac{n+(-1)^n}{n}\right)\quad ;\quad (2)\quad n\left(\sqrt{1+\frac{\sin n}{n^2}}-1\right)\quad ;\quad (3)\quad 4^n\left(n^{\frac{1}{n!}}-1\right)$$

on répondra aux deux questions suivantes :

a. Déterminer un équivalent le plus simple possible.
b. La suite admet-elle une limite, et si oui laquelle ?

Exercice 2. *un peu de rangement.*

Un élève décide de ranger dans 7 tiroirs les cours de ses différentes matières (Biologie, Chimie, Physique, Math, Info, LV1, Français) de sorte que les cours d'une même matière soient tous rangés dans un même tiroir. Un rangement est donc le choix d'un tiroir pour chacune des différentes matières.

Combien y-a-t-il de façons de ranger les matières dans les tiroirs dans les cas suivants :

1. En tout ?
2. de sorte qu'il y ait exactement une matière par tiroir ?
3. de sorte que le premier tiroir reste vide ?
4. de sorte que seul le premier tiroir reste vide ?
5. de sorte qu'un seul tiroir reste vide ?
6. de sorte qu'une matière scientifique ne soit jamais rangée dans un même tiroir qu'une matière littéraire ? (Indication : considérer deux cas, selon que les deux matières littéraires soient ou non dans le même tiroir.)

Exercice 3. Moyennes arithmétiques et harmoniques

Soit $0 < a < b$. On pose $h_0 = a$, $m_0 = b$ et on définit les deux suites (h_n) et (m_n) par récurrence à l'aide des relations $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$m_{n+1} = \frac{m_n + h_n}{2} \qquad \text{et} \qquad \frac{2}{h_{n+1}} = \frac{1}{m_n} + \frac{1}{h_n}$$

1. (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, m_n et h_n sont bien définis et vérifient
$$0 < h_n < m_n.$$
   (b) Déterminer le sens de variation des suites (h_n) et (m_n).
   (c) En déduire que les deux suites convergent vers la même limite ℓ.
2. (a) Montrer que la suite $(h_n m_n)$ est constante et en déduire la valeur de ℓ.
   (b) Montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad m_{n+1} - \ell = \frac{(m_n - \ell)^2}{2m_n}$$
3. On souhaite vérifier informatiquement le résultat de la limite commune ℓ trouvé dans l'exercice.
   (a) Écrire une fonction `limite(a,b,N)` prenant en argument deux flottants `a` et `b` (ils représenteront les valeurs de $m_0 = a$ et $h_0 = b$ qui définissent les deux suites), et un entier `N`, et qui renvoie une valeur approchée par défaut de ℓ, ainsi qu'une valeur approchée par excès, à $10^{-\mathtt{N}}$ près.

   La fonction devra pour le calcul utiliser les résultats établis à la question 1.
   (b) Écrire une fonction `test_limite(a,b,N)` prenant en argument deux flottants `a` et `b` et un entier `N`, et qui renverra un booléen `True` ou `False`, selon si la valeur de ℓ calculée à la question 2 est cohérente avec le résultat renvoyé par `limite(a,b,N)`.

Exercice 4. *Dans une urne...*

On considère une urne contenant 5 boules bleues, 2 boules blanches et 5 boules rouges.
Les boules bleues sont numérotées de 1 à 5, les boules blanches sont numérotées de 1 à 2, les boules rouges sont numérotées de 1 à 5.
On tire simultanément 5 boules dans cette urne.

1. Combien y a-t-il de tirages en tout ?
2. Combien y a-t-il de tirages contenant les trois boules portant le numéro 1 ?
3. Combien y a-t-il de tirages contenant au moins une boule rouge ?
4. Combien y a-t-il de tirages contenant exactement 3 boules rouges ?
5. Combien y a-t-il de tirages d'une seule couleur ? bicolores ? tricolores ?

Exercice 5. *Une suite implicite*

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f_n(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} kx^k$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Démontrer que l'équation $f_n(x) = 1$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}_+$. On la note x_n.

2. Calculer x_1 et x_2.

3. Justifier que $f_{n+1}(x_n) = 1 + (n+1)x_n^{n+1}$.

   En déduire que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante puis qu'elle converge.

4. Justifier que pour tout entier $n \geq 2$, $x_n \leq \dfrac{1}{2}$.

   En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} (x_n)^n = 0$ et que $\lim\limits_{n\to+\infty} n(x_n)^n = 0$.

5. On pose $F_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k$ et on note F_n' la fonction dérivée de la fonction F_n ainsi définie.

   Vérifier que $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f_n(x) = xF_n'(x)$.

6. Soit $x \in \mathbb{R}_+\backslash\{1\}$. Exprimer $F_n(x)$ sans le symbole $\sum$.

   En déduire que $f_n(x) = x \cdot \dfrac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(1-x)^2}$.

7. Déduire des questions précédentes la limite de x_n quand $n \to +\infty$.