

Lycée Fénelon
Année 2021-22

BCPST

Mathématiques

Devoir surveillé n° 6

Samedi 26 mars 2022

Durée : 3 heures

Qualité de la rédaction, clarté des raisonnements, présentation, orthographe et ponctuation font partie des critères de notation.

Il est vivement recommandé de lire attentivement les questions, d'*encadrer les résultats* et de signaler clairement toute question admise.

Une partie de la notation sera attribuée à la présentation de la copie, à ce que les résultats soient encadrés proprement, à la règle et en couleur, ainsi qu'à la clarté de tous les raisonnements et calculs.

L'usage des calculatrices et des téléphones portables est rigoureusement interdit.

Exercice 1. *Calcul de limites et d'équivalents*

1. Calculer la limite pour chacune des suites suivantes :

$$\text{a) } \frac{3^n - \ln n + n^3}{\sqrt{n} - 2^{2n}} \quad \text{b) } \frac{\sqrt{n^2 - 1} - \sqrt{n^2 + 1}}{n} \quad \text{c) } \left(1 - \frac{1}{2n}\right)^n$$

2. Calculer un équivalent simple pour chacune des suites suivantes :

$$\text{a) } n! - 3^n + n^2 \quad \text{b) } \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \quad \text{c) } \left(\cos \frac{1}{n}\right)^{\sin \frac{1}{n}} - 1$$

Exercice 2. *Dénombrements*

On dispose de 5 jetons numérotés de 1 à 5 que l'on doit ranger dans 5 casiers numérotés de 1 à 5. Dans chacun des cas suivants, déterminer le nombre de rangements qui vérifient les conditions demandées.

On remarquera qu'un rangement est uniquement déterminé par une application de $\llbracket 1; 5 \rrbracket$ (les jetons) dans $\llbracket 1; 5 \rrbracket$ (les casiers).

- a) Aucune condition.
- b) Le casier n°5 est vide.
- c) Le jeton n°1 est dans le casier n°1.

- d) Chaque casier contient un et un seul jeton.
- e) Tous les jetons sont dans un même casier.
- f) Il y a exactement 3 jetons dans le casier n°3.
- g) Un casier contient 3 jetons, et un autre 2 jetons.
- h) Les casiers 1 et 2 sont occupés, tous les autres sont vides.
- i) Deux casiers exactement sont occupés.
- j) Chaque jeton pair est dans un casier pair, et chaque jeton impair dans un casier impair.
- k) La somme des numéros de jetons dans le casier n°5 vaut 6.

Exercice 3.

Méthode de Héron d’Alexandrie pour l’extraction de racines carrées (1er siècle ap. J.C.)

Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ un paramètre réel strictement positif et soit la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant :

$$(x_n)_n \begin{cases} x_0 = \alpha \\ \forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = \frac{x_n^2 + \alpha}{2x_n} \end{cases}$$

Nous allons établir que la suite $(x_n)_n$ converge vers la racine carrée de α , $\sqrt{\alpha}$.

1. Montrer que la suite $(x_n)_n$ est bien définie et que tous ses termes sont strictement positifs.
2. Prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}^* : x_n - \sqrt{\alpha} \geq 0$.
3. En déduire le signe de $x_{n+1} - x_n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$, puis que la suite $(x_n)_n$ est décroissante à partir du rang 1 (c’est à dire que la suite extraite $(x_n)_{n \geq 1}$ est décroissante).
4. Prouver que la suite $(x_n)_n$ est convergente.
5. Après avoir justifié que $\lim x_n$ est un réel positif, montrer que $\lim x_n = \sqrt{\alpha}$.
6. (a) Ecrire en python une fonction `suite_x()` : prenant deux paramètres : un nombre `a` et un entier `n`, l’appel de `suite_x(a,n)` retourne la valeur (approchée) de x_n pour le paramètre $x_0 = a$.
 (b) Ecrire en python une fonction `racine_carree()` prenant en paramètre un nombre `a`, qui retourne une valeur approchée de sa racine carrée. On pourra utiliser la fonction `suite_x()` du a).

L’appel de `racine_carree(a)` :

- retournera le calcul `suite_x(a,10)` de x_{10} pour $x_0 = a$ lorsque $a > 0$,
- retournera 0 lorsque $a = 0$
- affichera à l’écran un message d’erreur si $a < 0$.

Exercice 4. *Étude d'une suite récurrente. Le nombre d'or.*

Partie 1.

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 1 + \frac{1}{u_n}$.

1. (a) Montrer que (u_n) est bien définie et à termes strictement positifs.
- (b) Représenter graphiquement la courbe représentative de l'application :

$$\begin{aligned} \mathbb{R}_+^* &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto 1 + \frac{1}{x} \end{aligned}$$

et construire les 4 premiers termes u_0, u_1, u_2, u_3 de (u_n) sur l'axe (Ox) .

- (c) Compléter (sur votre copie) le script python suivant qui définit une fonction `suite.u(n)` prenant en argument un entier `n` et qui retourne le terme u_n , de rang n , de la suite (u_n) .

```
def suite_u(n):
    u = ...
    for k in range(...):
        ...
    return u
```

- (d) Compléter (sur votre copie) le script python suivant qui définit une fonction `liste_u(n)` prenant en argument un entier `n` et qui retourne la liste des $n + 1$ premiers termes $u_0, u_1, \dots, u_n$ de la suite (u_n) . Elle ne devra pas appeler la fonction `suite_u()`.

```
def liste_u(n):
    L = [ 1 ]
    for k in range(...):
        ...
    return L
```

Partie 2.

On considère l'application $g : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ définie par $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, g(x) = 1 + \frac{x}{x+1}$.

1. (a) Montrer que l'équation $g(x) = x$ admet sur $\mathbb{R}_+^*$ une unique solution ϕ que l'on déterminera. Vérifier que $1 < \phi < 2$.
- (b) Dresser le tableau de variation de g ; on y fera apparaître le nombre ϕ .
- (c) En déduire que $g(]0; \phi]) \subset]0; \phi]$ et que $g([\phi; +\infty[) \subset [\phi; +\infty[$.
- (d) Montrer que les suites extraites de (u_n) de rangs pairs $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et de rangs impairs $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ vérifient les relations de récurrence :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, u_{2(n+1)} &= g(u_{2n}), \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{2(n+1)+1} &= g(u_{2n+1}) \end{aligned}$$

2. (a) Montrer que $(u_{2n})_n$ est majorée par ϕ et que $(u_{2n+1})_n$ est minorée par ϕ .
 (b) Etudier le signe du trinôme $-x^2 + x + 1$ sur $\mathbb{R}_+$. En déduire la monotonie des suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) .
 (c) Montrer que les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont convergentes et calculer leur limite. Que peut-on dire des suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) ?
 (d) Montrer que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.
3. Soit la suite (v_n) de terme général (il y a n barres de fractions)

$$v_n = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\cdots + \frac{1}{1}}}}$$

Par exemple : $v_0 = 1$, $v_1 = 1 + \frac{1}{1}$, $v_2 = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}}$.

- (a) Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n .
- (b) La suite (v_n) a-t-elle une limite? Et si oui laquelle?