Exercice 1

Calcul de limites et d'équivalents

1. a)

$$\frac{3^n-\ln n+n^3}{\sqrt{n}-2^{2n}}=\frac{3^n\left(1-\frac{\ln n}{3^n}+\frac{n^3}{3^n}\right)}{4^n\left(\frac{\sqrt{n}}{4^n}-1\right)}=\underbrace{\left(\frac{3}{4}\right)^n}_{\to 0}\times\frac{\overbrace{1-\frac{\ln n}{3^n}+\frac{n^3}{3^n}}^{\to 1}}{\underbrace{\frac{\sqrt{n}}{4^n}-1}_{\to -1}}\longrightarrow\boxed{0}$$

Par croissance comparée, limite d'une suite géométrique, et produit des limites.

b)

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{n^2-1}-\sqrt{n^2+1}}{n}&=\frac{\left(\sqrt{n^2-1}-\sqrt{n^2+1}\right)\left(\sqrt{n^2-1}+\sqrt{n^2+1}\right)}{n\left(\sqrt{n^2-1}+\sqrt{n^2+1}\right)}\\&=\frac{n^2-1-n^2-1}{n\left(\sqrt{n^2-1}+\sqrt{n^2+1}\right)}\\&=\frac{-2}{n\left(\sqrt{n^2-1}+\sqrt{n^2+1}\right)}\longrightarrow\boxed{0^-}\end{aligned}$$

par quotient des limites.

c)

$$\left(1-\frac{1}{2n}\right)^n=\exp\left(n\ln\left(1-\frac{1}{2n}\right)\right)$$

or $n\ln\left(1-\frac{1}{2n}\right)\sim-\frac{n}{2n}\sim-\frac{1}{2}$

$$\Longrightarrow\left(1-\frac{1}{2n}\right)^n\longrightarrow\exp\left(-\frac{1}{2}\right)=\boxed{\frac{1}{\sqrt{e}}}$$

par composition des limites.

2. a)

$$n!-3^n+n^2=n!\underbrace{\left(1-\frac{3^n}{n!}+\frac{n^2}{n!}\right)}_{\longrightarrow 1}\sim\boxed{n!}$$

par croissance comparée.

b)

$$\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=\sqrt{n}\left(\sqrt{\frac{n+1}{n}}-1\right)=\sqrt{n}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}-1\right)\sim\sqrt{n}\times\frac{1}{2n}\sim\boxed{\frac{1}{2\sqrt{n}}}$$

par produit d'équivalents avec $\sqrt{1+u_n}-1\sim\frac{1}{2}u_n$.

c)

$$\begin{aligned}\left(\cos\frac{1}{n}\right)^{\sin\frac{1}{n}}-1&=\exp\underbrace{\left(\sin\left(\frac{1}{n}\right)\ln\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right)}_{\to 0}-1\\&\sim\sin\left(\frac{1}{n}\right)\ln\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)\\&\sim\sin\left(\frac{1}{n}\right)\ln\left(1+\underbrace{\cos\frac{1}{n}-1}_{\to 0}\right)\\&\sim\sin\left(\frac{1}{n}\right)\times\left(\cos\frac{1}{n}-1\right)\\&\sim\frac{1}{n}\times\left(-\frac{1}{2n^2}\right)\sim\boxed{-\frac{1}{2n^3}}\end{aligned}$$

par produit d'équivalents avec $e^{u_n}-1\sim u_n$, $\ln(1+u_n)\sim u_n$, $\sin(u_n)\sim u_n$ et $1-\cos u_n\sim\frac{1}{2}u_n^2$.

Exercice 3

Dénombrements

a) Il y a autant de rangements que d'applications de $[\![1;5]\!]$ (les jetons) dans $[\![1;5]\!]$ (les casiers). Soit : $\boxed{5^5=3125}$.

b) On range les jetons dans les casiers 1 à 4 ; il y a autant de rangements que d'applications de $[\![1;5]\!]$ dans $[\![1;4]\!]$. Soit : $\boxed{4^5=1024}$.

c) Il suffit de choisir où ranger les jetons 2 à 5 ; il y a autant de rangements que d'applications de $[\![2;5]\!]$ dans $[\![1;5]\!]$. Soit : $\boxed{5^4=625}$.

d) Il y a un jeton par casier si et seulement si l'application associée est bijective ; donc autant de rangements que de bijections entre deux ensemble de cardinal 5 ; soit $\boxed{5!=120}$.

e) Il faut choisir les 3 jetons dans le casier n°3 et comment ranger les deux jetons restants dans les 4 casiers restants ; soit $\boxed{\binom{5}{3}\times 4^2 = \frac{5\times 4}{2}\times 4^2 = 160}$.

f) Il faut choisir le casier contenant 3 jetons, soit $\binom{5}{1}=5$ possibilités, le 3 jetons dans ce casier, soit $\binom{5}{3}=10$ possibilités, le casier contenant deux jetons, soit $\binom{4}{1}=4$ possibilités, les deux jetons dans ce casier, soit $\binom{2}{2}=1$ possibilité, et c'est tout : il ne reste aucun jeton à ranger. Soit $\boxed{10\times 5\times 4\times 1 = 200}$ rangements.

g) Il y a 2^5 rangements pour lesquels aucuns des casiers n°3,4,5 n'est occupé, parmi lesquels pour 2 exactement seul le casier 1 ou 2 est occupé. Il y a donc $\boxed{2^5-2=30}$ rangements possibles.

h) L'argument est le même qu'à la question précédente, mais il faut aussi choisir aussi les deux casiers occupés ; soit $\boxed{\binom{5}{2}\times 30 = 10\times 30 = 300}$ rangements.

i) Entre 1 et 5 il y a deux nombres pairs et trois impairs ; il faut choisir le rangement des jetons pairs dans les casiers pairs, 2^2 possibilités, et le rangement des jetons impairs dans les casiers impairs, 3^3 possibilités, soit en tout $\boxed{2^2\times 3^3=108}$ rangements.

j) Il y a trois possibilités pour que la somme des numéros de jetons vaille 6 :
– jetons 1 et 5 ; il faut encore choisir comment ranger les 3 jetons restants dans les 4 casiers restants, soit $4^3=64$.
– jetons 2 et 4. Il reste encore $4^3=64$ choix.
– jetons 1, 2 et 3. Il faut encore choisir comment ranger les 2 jetons restants dans les 4 casiers restants, soit $4^2=16$.
Finalement, il y a en tout $\boxed{64+64+16=144}$ rangements possibles.

Exercice 3

Méthode de Héron d'Alexandrie

1. Par récurrence avec pour proposition de récurrence : $\mathcal{P}(n)$: "x_n est bien défini et strictement positif".
<u>Initialisation</u> : $x_0=\alpha$ est bien défini et >0.
<u>Hérédité</u> : Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie. Ainsi x_n existe et $x_n>0$; alors $x_{n+1}=\dfrac{x_n^2+\alpha}{2x_n}$ existe et $x_{n+1}>0$. Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
Ainsi $\forall\, n\in\mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie : la suite (x_n) est bien définie et à termes tous >0.

2. Soit $n\in\mathbb{N}$; étudions le signe de $x_{n+1}-\sqrt{\alpha}$:
$x_{n+1}-\sqrt{\alpha} = \dfrac{x_n^2+\alpha}{2x_n}-\sqrt{\alpha} = \dfrac{x_n^2+\alpha-2\sqrt{\alpha}x_n}{2x_n} = \dfrac{(x_n-\sqrt{a})^2}{2x_n} \geqslant 0$ puisque $x_n>0$ et qu'un carré est toujours positif. Donc $\forall\, n\in\mathbb{N}^*$, $\boxed{x_n-\sqrt{\alpha}\geqslant 0}$.

3. Soit $n\in\mathbb{N}^*$: $x_{n+1}-x_n = \dfrac{x_n^2+\alpha}{2x_n}-x_n = \dfrac{x_n^2+\alpha-2x_n^2}{2x_n} = \dfrac{\alpha-x_n^2}{2x_n} = \dfrac{(\sqrt{\alpha}-x_n)(\sqrt{\alpha}+x_n)}{2x_n}$. Puisque $x_n>0$ le dénominateur est positif. Puisque pour $n\in\mathbb{N}^*$, $\sqrt{\alpha}-x_n\leqslant 0$ (cf. 2)), alors pour tout $n\in\mathbb{N}^*$: $x_{n+1}-x_n\leqslant 0$. Ainsi la suite (x_n) est décroissante à partir du rang 1.

4. La suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante et minorée (par $\sqrt{\alpha}$ cf 2)), donc d'après le théorème de la limite monotone la suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$ est convergente, et il en est donc de même de la suite (x_n).

5. Posons $L=\lim x_n$. Puisque pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ $u_n>0$ alors $\lim u_n = L\geqslant 0$. Pour déterminer la limite L de x_n on effectue un passage à la limite dans la relation de récurrence :
$$x_{n+1}=\frac{x_n^2+\alpha}{2x_n} \Longrightarrow 2x_nx_{n+1}=x_n^2+\alpha \Longrightarrow 2L^2=L^2+\alpha \Longrightarrow L^2=\alpha$$
Donc puisque $\lim x_n = L\geqslant 0$: $\boxed{\lim x_n=\sqrt{\alpha}}$.

6. (a) Code python :
```
def suite_x(a,n):
    x = a
    for i in range(n):
        x = (x**2+a)/(2*x)
    return x
```
(b) Code python :
```
def racine_carree(a):
    if (a<0):
        print('Le paramètre doit être positif')
    elif a==0:
        return 0
    else:
        return suite_x(a,10)
```

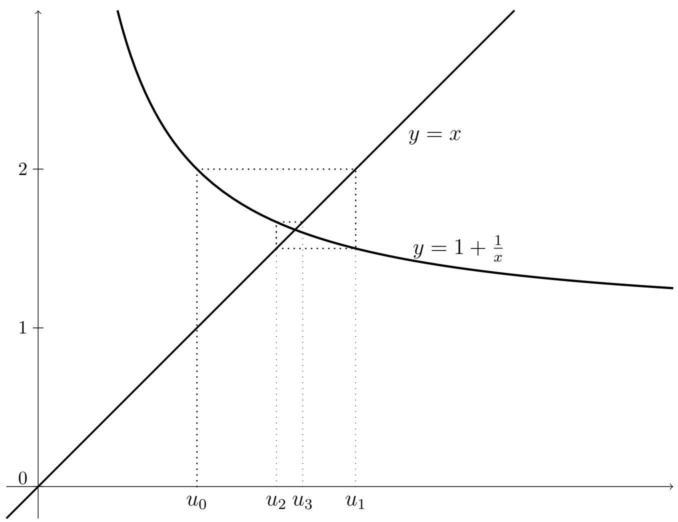
Exercice 4

Etude d'une suite récurrente. Le nombre d'or

Partie 1.

1. (a) Par récurrence avec pour proposition de récurrence : $\mathcal{P}(n)$: "u_n est bien défini et strictement positif".
Initialisation : $u_0 = 1$ est bien défini et > 0.
Hérédité : Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie. Ainsi u_n existe et $u_n > 0$; alors $u_{n+1} = 1 + 1/u_n$ existe et $u_{n+1} > 1 > 0$. Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie : la suite (u_n) est bien définie et à termes tous > 0.

(b) Tracé de la courbe et construction des 4 premiers termes de (u_n) :



(c)
```
def suite_u(n):
    u = 1      # initialement u vaut u0=1
    for k in range(n):   # n itérations
        u = 1 + 1/u    # relation de récurrence
    return u
```

(d)
```
def liste_u(n):
    L = [ 1 ]
    for k in range(n):    # n itérations
        L.append(1 + 1/L[k])   # ajout terme suivant
    return L
```

Partie 2.

1. (a) Soit $x \in \mathbb{R}_+$; $g(x) = x \iff x = 1 + \frac{x}{x+1} \iff x(x+1) = x + 1 + x \iff x^2 - x - 1 = 0$. Le discriminant Δ vaut 5 donc il y a deux solutions réelles distinctes : $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. L'une, $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$, est négative (car $1 < \sqrt{5} \iff 1 < 5$) tandis que l'autre, $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, est positive. Ainsi g a pour unique point fixe : $\boxed{\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}}$.
De plus $1 < \frac{1+\sqrt{5}}{2} < 2 \iff 2 < 1 + \sqrt{5} < 4 \iff 1 < \sqrt{5} < 3 \iff 1 < 5 < 9$ ce qui est vrai. Ainsi $\boxed{1 < \phi < 2}$.

(b) g est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et $g'(x) = \frac{x+1-x}{(x+1)^2} = \frac{1}{(x+1)^2} > 0$. Donc g est strictement croissante. Sa limite en $+\infty$ est 2, et on en déduit ses variations :

x	0	ϕ	$+\infty$
g'		$+$	
$g(x)$	1	ϕ	2

De plus d'après le tableau de variation $g(]0;\phi]) =]1;\phi] \subset]0;\phi]$, et $g([\phi;+\infty[) = [\phi;2[\subset [\phi;+\infty[$.

(c) $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{2n+2} = 1 + \dfrac{1}{u_{2n+1}} = 1 + \dfrac{1}{1 + \frac{1}{u_{2n}}} = 1 + \dfrac{u_{2n}}{u_{2n}+1} = g(u_{2n})$, et

$u_{2n+3} = 1 + \dfrac{1}{u_{2n+2}} = 1 + \dfrac{1}{1 + \frac{1}{u_{2n+1}}} = 1 + \dfrac{u_{2n+1}}{u_{2n+1}+1} = g(u_{2n+1})$,

2. (a) Montrons par récurrence que ϕ majore u_{2n}.
Initialisation. $u_0 = 1 < \phi$. La proposition est vraie au rang 0.
Hérédité. Supposons que $u_{2n} \leqslant \phi$. D'après le tableau de variation de g, $x \leqslant \phi \implies g(x) \leqslant \phi$. Ainsi $u_{2(n+1)} = g(u_{2n}) \leqslant \phi$. (u_n) est majorée par ϕ.
Montrons par récurrence que ϕ minore u_{2n+1}.
Initialisation. $u_1 = 1 + \frac{1}{1} = 2 > \phi$. La proposition est vraie au rang 0.
Hérédité. Supposons que $u_{2n+1} \geqslant \phi$. D'après le tableau de variation de g si $x \geqslant \phi$ alors $g(x) \geqslant \phi$. Ainsi $u_{2(n+1)+1} = g(u_{2n+1}) \geqslant \phi$. (u_n) est minorée par ϕ.

(b) Etudions le signe du trinôme $-x^2+x+1$ sur $\mathbb{R}_+$; $\Delta = 5$, il y a 2 racines distinctes : $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\frac{1-\sqrt{5}}{2} < 0$. Ainsi sur $\mathbb{R}_+$, $-x^2+x+1 \geqslant 0$ si et seulement si $x \leqslant \phi$.
Etudions la monotonie de (u_{2n}).
$u_{2n+2} - u_{2n} = 1 + \dfrac{u_{2n}}{u_{2n}+1} - u_{2n} = \dfrac{-u_{2n}^2 + u_{2n} + 1}{u_{2n}+1}$. Puisque $u_{2n} > 0$ le dénominateur est > 0, puisque $u_{2n} \leqslant \phi$ (question 2.a)), le numérateur est positif, ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{2n+2} - u_{2n} \geqslant 0$. La suite (u_{2n}) est croissante.

Etudions la monotonie de (u_{2n+1}).
$u_{2n+3} - u_{2n+1} = 1 + \dfrac{u_{2n+1}}{u_{2n+1}+1} - u_{2n+1} = \dfrac{-u_{2n+1}^2 + u_{2n+1} + 1}{u_{2n+1}+1}$. puisque $u_{2n+1} \geqslant \phi > 0$ (question 2.a)) le dénominateur est > 0 et le numérateur est négatif. Ainsi $u_{2n+3} - u_{2n+1} \leqslant 0$: La suite (u_{2n+1}) est décroissante.

(c) La suite (u_{2n}) est croissante et majorée par ϕ. La suite (u_{2n+1}) est décroissante et minorée par ϕ. D'après le Théorème de la limite monotone, elles sont toutes deux convergentes. Leurs limites sont positives puisqu'elles sont à termes positifs (voir question 1). Par passage à la limite dans la relation de récurrence, leur limite l doit vérifier la relation $g(l) = l$, c'est à dire être un point fixe de g. Ainsi d'après la question 1.a), $l = \phi$.

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_{2n} = \lim_{n\to+\infty} u_{2n+1} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \phi}$$

Ainsi en particulier $(u_{2n} - u_{2n+1})$ a pour limite 0. Avec la question 2.b), Les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont adjacentes.

(d) Puisque ses suites extraites de rangs pairs (u_{2n}) et de rangs impairs (u_{2n+1}) convergent vers une même limite ϕ, (u_n) converge vers le nombre d'or $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

3. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{v_n}$ et $v_0 = 1$. La suite (v_n) n'est rien d'autre que la suite (u_n) écrite "en extension".

(b) La suite (v_n) converge vers le nombre d'or $\phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.