Lycée Fénelon
Année 2020-21

BCPST1

Mathématiques

Devoir surveillé n° 7

Lundi 3 mai 2021
Durée : 2 heures 00

Qualité de la rédaction, clarté des raisonnements, présentation, orthographe et ponctuation font partie des critères de notation. Il est vivement recommandé de lire attentivement les questions, d'*encadrer les résultats* et de signaler clairement toute question admise. L'usage des calculatrices est *interdit*.

Exercice 1. *Limites et continuité*

On considère la fonction $f : x \mapsto \left(\frac{x^2}{x^2 - 1} \right)^{x-1}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f .
2. Étudier la continuité de f sur chaque intervalle de son ensemble de définition.
3. La fonction f est-elle prolongeable par continuité en 1 ?
4. La fonction f est-elle prolongeable par continuité en -1 ?
5. Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
6. Préciser les asymptôtes horizontales et verticales (éventuelles) de la courbe représentative de f .

Exercice 2. *La fonction tangente hyperbolique et sa bijection réciproque*

On définit la fonction *tangente hyperbolique* (th), par :

$$\text{th}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

I. *Etude de th :*

1. Montrer que la fonction th est définie sur $\mathbb{R}$ et étudier sa parité.
2. Donner les limites de th en $+\infty$ et $-\infty$.
3. Montrer que la fonction th est dérivable sur $\mathbb{R}$. Calculer sa fonction dérivée th' et l'exprimer en fonction de th.
4. Dresser le tableau de variations de th.
5. Déterminer l'équation de la tangente au point d'abscisse 0 de la courbe de th.
6. Déterminer un équivalent de th en 0.
7. Tracer dans le plan muni d'un repère orthonormé la courbe représentative de th ainsi que sa tangente au point d'abscisse 0 et ses branches asymptôtes.

II. *Sa bijection réciproque argh :*

1. Montrer que la fonction th réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle I à déterminer.
On appelle *argument tangente hyperbolique*, que l'on note argh, sa bijection réciproque.

2. Donner le sens de variation de argth .
3. Démontrer que argth est impaire.
4. Montrer que argth est dérivable sur I , et donner l'expression de sa fonction dérivée.
5. En déduire que $\operatorname{argth}(x) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right)$.

Exercice 3. Tirages avec et sans remise.

Dans tout l'exercice, n désigne un entier naturel non-nul. On considère une urne contenant $2n$ boules, dont exactement n boules blanches et n boules rouges. On tire dans l'urne successivement n boules. On s'intéresse à la probabilité $\mathbb{P}(T)$ de tirer exactement une boule blanche dans plusieurs cas de figure. On notera pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$:

B_i l'évènement : "la i -ème boule tirée est blanche", et

R_i l'évènement : "la i -ème boule tirée est rouge".

Partie 1 : Tirage de boules avec remise

1. Dans cette partie on tire successivement n boules dans l'urne en remettant chaque boule tirée dans l'urne après tirage. Ainsi les n tirages sont indépendants.
 - (a) Quelle est la probabilité de ne tirer que des boules rouges ? Quelle est la probabilité de tirer au moins une boule blanche ?
 - (b) On souhaite calculer la probabilité de tirer exactement une boule blanche. Exprimer l'évènement à l'aide de la famille d'évènements T_i : "Seule la i -ème boule tirée est blanche" ($i \in \llbracket 1, n \rrbracket$) et en déduire le calcul de cette probabilité.

Partie 2 : Tirage de boules avec et sans remise

1. Dans toute cette partie, on tire successivement n boules dans l'urne en remettant les boules rouges mais cette fois-ci en ne remettant plus les boules blanches après tirage.
 - (a) Calculer la probabilité $\mathbb{P}(B_1)$ de tirer une boule blanche au premier tirage.
 - (b) Calculer la probabilité $\mathbb{P}(B_1 \cap R_2)$ de tirer une boule blanche au premier tirage et une boule rouge au deuxième.
 - (c) A l'aide de la formule des probabilités totales calculer la probabilité $\mathbb{P}(R_2)$ de tirer une boule rouge au deuxième tirage. En déduire que les n tirages ne sont pas indépendants.
2. On souhaite calculer la probabilité $\mathbb{P}(T)$ de tirer exactement une boule blanche en n tirages.
 - (a) Soit $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$; à l'aide de la formule des probabilités composées calculer la probabilité $\mathbb{P}(T_i)$ pour qu'une boule blanche n'apparaisse qu'au i -ème tir.
 - (b) En déduire la probabilité $\mathbb{P}(T)$ de tirer exactement une boule blanche en n tirages. On notera $p_n = \mathbb{P}(T)$ où n désigne le nombre n de boules tirées.
 - (c) Montrer que cette probabilité p_n est équivalente à

$$\frac{n}{2^{n-1}} \times (\sqrt{e} - 1)$$

et en déduire sa limite lorsque n tend vers $+\infty$.