Lycée Fénelon
Année 2021-22

BCPST1

Mathématiques
Devoir surveillé n° 7

Samedi 23 avril 2022
Durée : 2 heures 30 minutes

Qualité de la rédaction, clarté des raisonnements, présentation, orthographe et ponctuation font partie des critères de notation.
Il est vivement recommandé de lire attentivement les questions, d'*encadrer les résultats* et de signaler clairement toute question admise.

Supports de cours, calculatrices et téléphones portables sont interdits.

On rappelle que toute réponse doit être justifiée correctement. Les barêmes donnés sont indicatifs.

Exercice 1.

(barême 5 points)

Une urne contient 7 boules blanches et 3 boules noires. On tire successivement et avec remise quatre boules de l'urne.
On suppose les boules numérotées, on note $\mathscr{U} = [\![1, 10]\!]$ l'ensemble des boules où 1,2,...,7 désignent les sept boules blanches et 8,9,10 les trois boules noires.
On considère l'univers $\Omega = [\![1, 10]\!]^4$, c'est-à-dire l'ensemble des 4-listes d'éléments de $\mathscr{U}$, muni de la probabilité uniforme $\mathbb{P}_u$. On rappelle que pour un événement $A \subset \Omega$: $\mathbb{P}_u(A) = \dfrac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)}$.

Dans les questions 1 à 5 on ne demande pas de simplifier les résultats obtenus.

1. Quelle est la probabilité pour qu'on n'obtienne que des boules blanches ? que des boules noires ?
2. Quelle est la probabilité que l'on obtienne au moins une boule blanche ? au moins une boule noire ?
3. Quelle est la probabilité que l'on obtienne dans cet ordre deux boules noires puis deux boules blanches ?
4. Quelle est la probabilité d'obtenir deux boules blanches exactement ?
5. Quelle est la probabilité que les boules obtenues successivement soient de couleurs alternées ?
6. Reprendre les questions 3), 4) et 5) lorsque le tirage s'effectue sans remise.

   Dans cette question 6, tous les résultats doivent être simplifiés sous forme de fractions irréductibles.

Exercice 2.

(barême 5 points)

1. Calculer les limites suivantes :

$$\text{a) } \frac{\sin x - \cos x}{x - \frac{\pi}{4}} \text{ en } \frac{\pi}{4} \quad ; \quad \text{b) } \frac{\ln(1+x^\alpha)}{\ln x} \text{ en } +\infty \text{ (où } \alpha > 0) \quad ; \quad \text{c) } \left(\frac{1-x+x^2}{1+x+x^2}\right)^{\frac{1}{x}} \text{ en } 0$$

2. Déterminer un équivalent simple de :

$$\text{a) } \ln(\cos x) \text{ en } 0 \quad ; \quad \text{b) } \frac{x^{x+1}-x}{\ln x} \text{ en } 0^+ \quad ; \quad \text{c) } \frac{\sqrt{x^4+2x^5\sin(x)}-x^2}{x^3} \text{ en } 0$$

Problème. *Fonctions convexes croissantes*

(barême : 10 points)

Les 3 parties sont indépendantes.

Dans la suite on considère une application $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ croissante et vérifiant :

$$\text{Pour tout } (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leqslant \frac{f(x)+f(y)}{2} \qquad (*)$$

Le but du problème est de montrer qu'une telle application :
– est continue (partie II),
– soit est constante, soit à limite $+\infty$ en $+\infty$ (partie III).

Partie I. *Exemple de fonction convexe et interprétation géométrique* (barême : 2 points)

Soit l'application $g : \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ g(x) = x^2 \end{array} \right.$.

1. Montrer que g vérifie $(*)$.
2. Dans cette question on considère le plan rapporté à un repère orthonormé.
   (a) Soient $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$ deux points du plan. Rappeler quelles sont les coordonnées du milieu du segment $[A, B]$.
   (b) Représenter dans un repère orthonormé, la courbe représentative $\mathcal{C}_g$ de g, un segment $[A, B]$ reliant deux points distincts $A(a, g(a))$ et $B(b, g(b))$ de $\mathcal{C}_g$, et les points $I\left(\frac{a+b}{2}, \frac{g(a)+g(b)}{2}\right)$ et $J\left(\frac{a+b}{2}, g(\frac{a+b}{2})\right)$.
   (c) Donner une interprétation géométrique de la propriété $(*)$.

Dans la suite, $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ désigne une application croissante et vérifiant $(*)$.

Partie II. *Continuité de f* (barême : 4 points)

On démontre dans cette partie la continuité de f.

1. (a) Justifier que f admet en tout point une limite à droite ainsi qu'une limite à gauche, finies.

(b) Justifier que pour tout $a \in \mathbb{R}$: $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) \leqslant f(a) \leqslant \lim\limits_{x \to a^+} f(x)$.

2. Dans cette question (u_n) désigne une suite à termes positifs telle que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0^+$.

   (a) Montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, $f\left(a + \dfrac{u_n}{2}\right) \leqslant \dfrac{f(a) + f(a+u_n)}{2}$.

   (b) Justifier (correctement !) que :

   $$\lim_{n \longrightarrow +\infty} f(a+u_n) = \lim_{n \longrightarrow +\infty} f\left(a + \frac{u_n}{2}\right) = \lim_{x \longrightarrow a^+} f(x)$$

   En déduire que pour tout $a \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) \leqslant f(a)$ puis que $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = f(a)$.

   (c) Montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$: $f(a) \leqslant \dfrac{f(a-u_n) + f(a+u_n)}{2}$.

   (d) Justifier (correctement !) que :

   $$\lim_{n \longrightarrow +\infty} f(a-u_n) = \lim_{x \longrightarrow a^-} f(x)$$

   En déduire que $f(a) \leqslant \lim\limits_{x \to a^-} f(x)$.

   (e) Conclure.

Partie III. *Limite de f en $+\infty$.* (barême : 4 points)

On établit dans cette partie les limites possibles en $+\infty$ pour f.

1. On suppose dans cette question que f est majorée.

   (a) Justifier que f a une limite finie en $+\infty$ que l'on notera L ; caractériser L à l'aide d'une borne supérieure.

   (b) Montrer que $L \leqslant f(0)$ (indication : on utilisera après l'avoir établie l'inégalité $f\left(\dfrac{x}{2}\right) \leqslant \dfrac{f(x)+f(0)}{2}$).

   (c) Montrer que $L = f(0)$.

   (d) En déduire que f est constante. (Indication : on sera amené à considérer deux cas selon que $x \geqslant 0$ ou $x < 0$).

2. On suppose dans cette question que f n'est pas constante.

   (a) Justifier que f admet une limite en $+\infty$ que l'on déterminera.

   (b) Vérifier que $\exp : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est un exemple de fonction (croissante, non constante et) vérifiant $(*)$. (Indication : on pourra comparer $e^{\frac{x}{2}} \times e^{\frac{y}{2}}$ et $\frac{e^x + e^y}{2}$.)