Lycée Fénélon
Année 2021-22

BCPST1

Mathématiques

Devoir surveillé n° 8

Samedi 11 juin 2022

Durée : 2 heures

Qualité de la rédaction, clarté des raisonnements, présentation, orthographe et ponctuation font partie des critères de notation.

Il est vivement recommandé de lire attentivement les questions, d'*encadrer les résultats* et de signaler clairement toute question admise.

Les calculatrices ne sont pas autorisées.

Exercice 1

On considère l'application f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.
2. Justifier que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_-^*$ et sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. Justifier que f est dérivable à gauche en 0.
4. Montrer que f est dérivable à droite en 0.
5. En déduire que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et donner sa dérivée f' .
6. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x > 0$ il existe un polynôme P_n tel que :

$$f^{[n]}(x) = \frac{P_n(x)}{x^{2n}} \times f(x)$$

7. En déduire que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. Préciser la valeur de $f^{[n]}(0)$.
8. En déduire pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ le développement limité d'ordre n de f en 0.

Exercice 2

On considère n urnes numérotées de 1 à n ($n \geq 2$). La première urne contient b boules blanches et r boules rouges où b et r sont des entiers strictement positifs. Les urnes suivantes contiennent chacune 1 boule blanche et 1 boule rouge.

On effectue n tirages dans ces urnes de la manière suivante : on tire au hasard une boule de la première urne puis on l'échange dans l'urne 2 avec une boule de l'urne 2 choisie au hasard. Puis on tire au hasard une boule de la deuxième urne que l'on échange dans la troisième urne avec une boule choisie au hasard, et ainsi de suite jusqu'au dernier tirage dans la dernière urne.

Pour $1 \leq k \leq n$, on désigne par :

- X_k la variable aléatoire égale à 1 si la boule tirée de la $k^{\text{ième}}$ urne est blanche et égale à 0 si elle est rouge.
- U_k le nombre de boules blanches dans l'urne k à l'issue du $(k-1)$ -ème échange.

Par exemple, $U_1 = b$, si la boule tirée dans l'urne 1 est blanche, $X_1 = 1$, si on l'échange avec une rouge dans l'urne 2, $U_2 = 2$ (l'urne 2 contient 2 boules blanches) si on tire ensuite une blanche dans l'urne 2, $X_2 = 1$, si on l'échange avec une blanche dans l'urne 3, $U_3 = 1$ (l'urne 3 contient une blanche et une rouge) et si on tire ensuite une rouge dans l'urne 3, $X_3 = 0$.

- 1) Déterminer la loi de probabilité de X_1 , puis ses espérance et variance en fonction de b et r .
- 2) Loi de U_2 .
 - a) Quel est l'univers image de U_2 ?
 - b) Calculer pour tout $k \in U_2(\Omega)$:

$$\mathbb{P}(U_2 = k/X_1 = 0) \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(U_2 = k/X_1 = 1)$$

- c) En déduire la loi de U_2 .
- 3) Déterminer la loi de probabilité de X_2 , puis ses espérance et variance en fonction de b et r .
- 4) Pour quelles valeurs de b et r les variables X_1 et X_2 suivent-elles la même loi de probabilité ?

Dans la suite de l'exercice on établit la loi de X_n et sa limite lorsque $n \rightarrow +\infty$.

Pour $1 \leq k \leq n$, on pose $p_k = \mathbb{P}(X_k = 1)$ et $q_k = \mathbb{P}(X_k = 0)$.

- 5) Pour tout $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, en vous inspirant du raisonnement mené à la question 2), exprimer la loi de U_{k+1} en fonction de p_k et q_k .
- 6) En déduire pour tout $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, l'expression de p_{k+1} en fonction de p_k et q_k puis une relation de récurrence entre p_{k+1} et p_k .
- 7) En déduire la loi de X_n .
- 8) Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} q_n$.
- 9) Que remarque-t-on lorsque $b = r$?