

Feuille d'Exercices 10

Systèmes linéaires - Méthode du pivot de Gauss

Exercice 1. Résoudre les systèmes échelonnés suivants :

$$(a) \begin{cases} 3x - y + z = 0 \\ 2y + z = 3 \\ z = -1 \end{cases} \quad (b) \begin{cases} x + y - z = 1 \\ z = 2 \end{cases} \quad (c) \begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ y + z = -1 \end{cases}$$

$$(d) \begin{cases} -x - 3y + z + t = 0 \\ z = -3 \end{cases}$$

Exercice 2. Résoudre les systèmes suivants par la méthode du pivot :

$$(a) \begin{cases} x + y + z = 3 \\ -x + 2y - z = -9 \\ 2x - y + 3z = 16 \end{cases} \quad (b) \begin{cases} x + 2y - z + t = 3 \\ 2x + y + z - 2t = -3 \end{cases} \quad (c) \begin{cases} 2y - z = 2 \\ x + y + z = 0 \\ 2x - 3y + z = -5 \\ x + 2y - z = 1 \end{cases}$$

$$(d) \begin{cases} 2y - z = 1 \\ x + y + z = 0 \\ 2x - 3y + z = -5 \\ x + 2y - z = 1 \end{cases}$$

Exercice 3. Résoudre les systèmes suivants de paramètres m, a, b, c des réels quelconques. On discutera des rangs des systèmes en fonction des valeurs des paramètres m, a, b, c .

$$(a) \begin{cases} mx + y = 2 \\ x - 3y = 1 \end{cases} \quad (b) \begin{cases} 2x + y + 3z = 3 \\ -x + y + z = 1 - 3a \\ -x + 4y + z = 1 - 9a \\ 3x + 2y - z = 2 \end{cases} \quad (c) \begin{cases} mx + y + z = a \\ x + my + z = b \\ x + y + mz = c \end{cases}$$

Exercice 4.

- (1) Déterminer tous les réels x, y, z strictement positifs, qui satisfont le système non linéaire :

$$\begin{cases} x \times y^2 \times z = 2 \\ \frac{y}{x} = 1 \\ \frac{x \times z}{y^2} = 8 \end{cases}$$

On posera $X = \ln(x)$, $Y = \ln(y)$ et $Z = \ln(z)$. En déduire ensuite toutes les solutions dans $\mathbb{R}^3$.

(2) Déterminer tous les réels a, b dans $] -\pi, +\pi]$ vérifiant :

$$\begin{cases} \sin(a+b) &= \frac{1}{2} \\ \sin(a-b) &= -\frac{1}{2} \end{cases}$$

On posera $x = \sin(a) \cos(b)$ et $y = \sin(b) \cos(a)$. En déduire ensuite toutes les solutions dans $\mathbb{R}^2$.