

Exercice 15

1. (a) $B + C = \frac{1}{3}(A + I + 2I - A) = I.$

(b) $B^2 = \frac{1}{9}(A + I)^2 = \frac{1}{9}(A^2 + 2A + I)$ d'après la formule du binôme, car A et I commutent.

$$B = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 \\ 1/\alpha & 1 & \alpha \\ 1/\alpha^2 & 1/\alpha & 1 \end{pmatrix} \quad B^2 = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 3 & 3\alpha & 3\alpha^2 \\ 3/\alpha & 3 & 3\alpha \\ 3/\alpha^2 & 3/\alpha & 3 \end{pmatrix} = B$$

(c) $C^2 = \frac{1}{9}(4I - 4A + A^2)$ d'après la formule du binôme et car A et $2I$ commutent.

$$C = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -\alpha & -\alpha^2 \\ -1/\alpha & 2 & -\alpha \\ -1/\alpha^2 & -1/\alpha & 2 \end{pmatrix} \quad C^2 = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 6 & -3\alpha & -3\alpha^2 \\ -3/\alpha & 6 & -3\alpha \\ -3/\alpha^2 & -3/\alpha & 6 \end{pmatrix} = C$$

(d) $2B - C = \frac{1}{3}(2A + 2I - 2I + A) = A.$

2. Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = 2^n B + (-1)^n C$. Par récurrence sur n :

(I) Pour $n = 0$: $A^0 = B + C = I$.

(H) Supposons l'hypothèse de récurrence vraie au rang n .

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= A^n \times A \\ &\stackrel{(HR)}{=} (2^n B + (-1)^n C)A \\ &= 2^n BA + (-1)^n CA \\ &= 2^n B(2B - C) + (-1)^n C(2B - C) \\ &= 2^{n+1} B^2 - 2^n BC + (-1)^n 2CB - (-1)^n C^2 \\ &= 2^{n+1} B + (-1)^{n+1} C + 2(-1)^n CB - 2^n BC \\ &= 2^{n+1} B + (-1)^{n+1} C + 2(-1)^n (I - B)B - 2^n B(I - B) \\ &= 2^{n+1} B^2 - 2^n BC + 2(-1)^n B - 2(-1)^n B - 2^n B + 2^n B \\ &= 2^{n+1} B^2 - 2^n BC \end{aligned}$$

L'hypothèse de récurrence reste donc vraie au rang $n + 1$.

Remarque : on peut aussi l'obtenir en appliquant la formule du binôme à $A^n = (2B - C)^n$ après avoir remarqué que B et C commutent (car B et C sont combinaisons linéaires de A et I) et en appliquant le fait que $B^k = B$ et $C^k = C$ dès que $k \geq 1$.

On en déduit :

$$A^n = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2^n + 2(-1)^n & \alpha(2^n - (-1)^n) & \alpha^2(2^n - (-1)^n) \\ (2^n - (-1)^n)/\alpha & 2^n + 2(-1)^n & \alpha(2^n - (-1)^n) \\ (2^n - (-1)^n)/\alpha^2 & (2^n - (-1)^n)/\alpha & 2^n + 2(-1)^n \end{pmatrix}$$