Lycée Fénelon	Mathématiques
Année 2021/22	BCPST1

Feuille d'Exercices 11

Les matrices

Exercice 1 Déterminer toutes les matrices dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui commutent avec $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 2 Calculer les matrices suivantes :

1. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^n \quad (n \in \mathbb{N}^*)$
2. $\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}^2$ (matrice carrée d'ordre n dont tous les coefficients valent 1)

Exercice 3 Résoudre dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ les équations d'inconnue X :

1. $X^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$
2. $X^2 - 2X = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$

Exercice 4 Les matrices suivantes sont-elles inversibles ? Si oui, donner leur inverse.

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -5 \\ 0 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$
2. $B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$
3. $C = \begin{pmatrix} 1 & -a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ où a est un paramètre réel.
4. $D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 5

1. Soit $A \in \mathcal{M}_3(C)$, la matrice diagonale : $A = diag(-i, i, 1)$.
   Montrer qu'une matrice $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ commute avec A si et seulement si M est diagonale.
2. Soit $B \in \mathcal{M}_3(C)$, la matrice : $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $D \in \mathcal{M}_3(C)$ une matrice diagonale : $D = diag(a, b, c)$. Montrer que D et B commutent si et seulement si D est scalaire, c'est-à-dire $a = b = c$.
3. Déterminer le *centre* de $\mathcal{M}_3(\mathbb{K})$, c'est-à-dire l'ensemble des matrices $C \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K})$ telles que pour toute matrice M de $\mathcal{M}_3(\mathbb{K})$, on ait $MC = CM$, autrement dit, l'ensemble des matrices C qui commutent avec toutes les matrices.

Exercice 6 Soit A la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer A^2 et A^3.
2. Montrer l'existence de deux suites réelles (a_n) et (b_n) telles que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ A^n = a_n A + b_n A^2.$$
3. Déterminer a_n et b_n pour tout n de $\mathbb{N}^*$ et en déduire les coefficient de A^n en fonction de n.

Exercice 7 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

1. Calculer A^2.
2. Démontrer par récurrence que pour tout entier n de $\mathbb{N}$, il existe deux réels α_n et β_n tels que $A^n = \alpha_n I_3 + \beta_n A$.
   On exprimera α_{n+1} et β_{n+1} en fonction de α_n et β_n.
3. En utilisant les suites auxiliaires $u_n = \alpha_n - \beta_n$ et $v_n = \alpha_n + 2\beta_n$, exprimer α_n et β_n en fonction de n.
4. En déduire le calcul de A^n pour tout entier n dans $\mathbb{N}$.

Exercice 8 Soient $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

1. Calculer $P^{-1}AP$. On note D cette matrice.

2. Calculer D^n, puis A^n pour tout n de $\mathbb{N}$.
3. Soient (u_n) et (v_n) deux suites définies sur $\mathbb{N}$ par la donnée de u_0 et v_0 et les relations :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} = 2u_n - 3v_n \\ v_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n - v_n) \end{cases}$$

On note $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$.

Montrer que $X_{n+1} = AX_n$, puis calculer X_n en fonction de n, u_0 et v_0.
En déduire l'expression de u_n et v_n en fonction de n, u_0 et v_0.

Exercice 9 Soit $M = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

1. Montrer que $(M - I)(M + 3I) = O_3$
2. Montrer que M est inversible et calculer M^{-1}.
3. Déterminer deux réels α et β tels que $M^2 = \alpha M + \beta I$
4. Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}$, il existe deux réels α_n et β_n tels que $M^n = \alpha_n M + \beta_n I$. Déterminer α_n et β_n en fontion de n.

Exercice 10 1. Soit $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(a) Calculer N^n pour tout entier naturel n.
(b) Déterminer toutes les matrices qui commutent avec N.
(c) Existe-t-il une matrice $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $M^2 = N$?

2. Soit $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3 + N$.

   Répondre aux mêmes questions qu'en (1) avec cette matrice $I_3 + N$.

Exercice 11 Soit A une matrice nilpotente de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (ie telle qu'il existe p de $\mathbb{N}^*$ tel que $A^p = O_n$)

Montrer que $I_n - A$ est inversible et donner son inverse. La matrice A peut-elle être inversible ?

Exercice 12 Déterminer en fonction du réel λ le rang de la matrice $A - \lambda I_3$, où :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ -2 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Exercice 13 Soit dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ la matrice :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que P est inversible et trouver son inverse.
2. Calculer $D = P^{-1}AP$ où :

$$A = \begin{pmatrix} 16 & 4 & -4 \\ -18 & -4 & 5 \\ 30 & 8 & -7 \end{pmatrix}$$

3. Montrer que les matrices D et Δ commutent ssi Δ est une matrice diagonale.
4. Pour résoudre l'équation matricielle $X^2 = A$ (1), on pose $Y = P^{-1}XP$.
   (a) Montrer que X est une solution de (1) ssi $Y^2 = D$.
   (b) Si X est une solution de (1), montrer que $YD = DY$. En déduire que $Y = \text{diag}(0, \gamma, 2\gamma')$ avec γ et γ' dans l'ensemble $\{-1, 1\}$.
   (c) Quelles sont les solutions de (1) ?

Exercice 14 On considère E le sous-ensemble de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, formé des matrices de la forme :

$$M(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

où θ est un réel.

1. Montrer que E est stable pour la multiplication matricielle. L'est-il pour l'addition ?
2. Montrer que ${}^tM(\theta) = M(-\theta) = (M(\theta))^{-1}$.
3. Prouver que, pour tout entier n de $\mathbb{N}$, $(M(\theta))^n = M(n\theta)$.
4. Exprimer de deux façons $(M(\theta) + M(-\theta))^n$ et en déduire $\cos^n(\theta)$ en fonction des $\cos(k\theta)$.

Exercice 15 Soit A une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ et α un complexe non nul. On pose :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \alpha^2 \\ 1/\alpha & 0 & \alpha \\ 1/\alpha^2 & 1/\alpha & 0 \end{pmatrix}$$

Soient $B = \frac{1}{3}(A + I)$ et $C = \frac{1}{3}(2I - A)$

1. Vérifier que :
   (a) $B + C = I$
   (b) $B^2 = B$
   (c) $C^2 = C$
   (d) $A = 2B - C$
2. En déduire que pour tout entier n de $\mathbb{N}$, $A^n = 2^nB + (-1)^nC$.
   Expliciter A^n.