Lycée Fénelon **BCPST1**
Année 2021-22 Applications

TD n^{o} 12 : Exercices sur les applications

Exercice 1 Les applications suivantes sont-elles injectives ? surjectives ? bijectives ? Dans ce dernier cas, donner l'expression de sa fonction réciproque.

1. $f_1 : \begin{array}{rcl} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ n & \longmapsto & n+2 \end{array}$
2. $f_2 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 2x \end{array}$
3. $f_3 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}+ \\ x & \longmapsto & |x| \end{array}$
4. $f_4 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \lfloor x \rfloor \end{array}$
5. $f_5 : \begin{array}{rcl} [0,2] & \longrightarrow & [0,2] \\ x & \longmapsto & \begin{cases} x & \text{si } x \in [0,1[\\ 3-x & \text{si } x \in [1,2] \end{cases} \end{array}$
6. $f_6 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (x+y, 2x-y) \end{array}$
7. $f_7 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (x-2y, -2x+4y) \end{array}$

Exercice 2 Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, définie par : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$

1. f est-elle injective ? surjective ?
   (indication : Etudier les variations de f et son tableau de variations)
2. La restriction de f à $[-1,\ 1]$ est-elle bijective, injective ?
3. Déterminer $f([-2,\ 2])$ à l'aide du tableau de variations et si besoin de la représentation graphique de f.
4. Soit l'application : $g : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par : $\forall\, x \in \mathbb{R}^*,\ g(x) = \dfrac{1}{x}$.
5. Sur quels ensembles peut-on définir les applications composées $f \circ g$ et $g \circ f$? (considérer une restriction de f.)
6. Donner les *expressions analytiques* de $f \circ g$ et de $g \circ f$ et représenter leurs courbes représentatives dans le plan.

7. $f \circ g$ et $g \circ f$ sont-elles injectives, surjectives, bijectives ?

Exercice 3 Soit f la fonction qui à $z \in \mathbb{C}$ associe $f(z) = \dfrac{1+iz}{z+i}$.

1. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{C} \setminus \{-i\}$ sur $\mathbb{C} \setminus \{i\}$.
   (Indication : résoudre l'équation $Z = \dfrac{1+iz}{z+i}$).
2. Soit $H = \{z \in \mathbb{C},\ \mathrm{Im}(z) > 0\}$ et $D = \{z \in \mathbb{C},\ |z| < 1\}$. Montrer que f réalise une bijection de H sur D. (Indication : Montrer que $|f(z)| < 1 \iff Im(z) > 0$).

Exercice 4 Soient E, F et G trois ensembles, f une application de E dans F et g une application de F dans G. Démontrer que :

1. a) Si $g \circ f$ est injective, alors f est injective.
   b) Si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective.
   c) Montrer que si $f : E \longrightarrow E$ est telle que $f \circ f$ est bijective, alors f est bijective.
2. Si $g \circ f$ est injective et f surjective, alors g est injective.
3. Si $g \circ f$ est surjective et g injective, alors f est surjective.

Exercice 5 Soient f une application de E dans F et A, B deux parties de l'ensemble de départ E.

1. Démontrer que : $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.
2. Démontrer que : $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.
3. Démontrer que si f est injective alors $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.
4. Soit f l'application de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{N}$ définie par $f(n) = n^2$. Trouver deux parties A et B de $\mathbb{Z}$ telles que $f(A \cap B) \neq f(A) \cap f(B)$.

Exercice 6 Soit E un ensemble et A et B deux parties de E.
On rappelle que l'application notée χ_A (prononcer "ki A") et appelée **indicatrice de la partie** A de E, est l'application de E dans $\{0, 1\}$ définie par :

$$\forall x \in E,\ \chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases}$$

1. Dessiner dans le plan le graphe de l'application $\chi_A : \mathbb{R} \longrightarrow \{0, 1\}$ lorsque $E = \mathbb{R}$ et $A = \mathbb{R}_+,\ \mathbb{R}^*,\ \mathbb{N},\ [0, 1]$.
2. Démontrer que :
   (a) $A \subset B \iff \chi_A \leq \chi_B$ (c'est-à-dire $\forall\, x \in E$, $\chi_A(x) \leq \chi_B(x)$.)
   (b) $A = B \iff \chi_A = \chi_B$

(c) $\chi_A = {\chi_A}^2$ (χ_A^2 est l'application définie sur E par $\forall x \in E$, $\chi_A^2(x) = \left(\chi_A(x)\right)^2$.)

(d) $\chi_{A \cap B} = \chi_A \chi_B$

(e) $\chi_{\overline{A}} = 1 - \chi_A$

(f) $\chi_{A \cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_A \chi_B$

(g) $\chi_{A \smallsetminus B} = \chi_A(1 - \chi_B)$