

Feuille d'Exercices 13

Les Polynômes

Exercice 1. Factoriser :

- (1) $X^3 - 1$ dans $\mathbb{R}[X]$ puis dans $\mathbb{C}[X]$.
- (2) $X^4 - 16$ dans $\mathbb{R}[X]$ puis dans $\mathbb{C}[X]$.
- (3) $X^6 - 1$ dans $\mathbb{R}[X]$ puis dans $\mathbb{C}[X]$.
- (4) $X^4 - 6X^3 + 11X^2 - 6X$ dans $\mathbb{R}[X]$ puis dans $\mathbb{C}[X]$.

Exercice 2.

- (1) Montrer que si $a \in \mathbb{C}$ est racine de $P \in \mathbb{R}[X]$ alors \bar{a} est aussi racine de P , puis que le polynôme $(X - a)(X - \bar{a})$ est un polynôme à coefficients réels dont on exprimera les coefficients en fonction de a .
- (2) Factoriser :
 - (a) $X^4 + 16$ dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$.
 - (b) $X^4 - X^2 + 1$ dans $\mathbb{C}[X]$, puis dans $\mathbb{R}[X]$ (*Indication* : poser $Y = X^2$).
 - (c) $X^4 + 3X^3 - 14X^2 + 22X - 12$ dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$ sachant que $1 + i$ est racine.

Exercice 3. Calculer le degré et le coefficient dominant du polynôme $P = (X + 1)^n + (-1)^n(X - 1)^n$.

Exercice 4. Montrer qu'une fonction polynôme réelle est impaire si et seulement si tous ses coefficients d'indice pairs sont nuls.

À quelle condition nécessaire et suffisante sur ses coefficients une fonction polynôme réelle est-elle paire ?

Exercice 5. Soit $\lambda \in \mathbb{C}^*$. Résoudre dans $\mathbb{C}[X]$: $(P')^2 = \lambda P$.

Exercice 6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer a, b pour que le polynôme $P = aX^{n+1} + bX^n + 1$ admette 1 comme racine double.

Exercice 7.

- (1) Quelles sont les racines du polynôme $X^2 + X + 1$?
- (2) Montrer que pour tout entiers naturels n, p, q le polynôme $X^{3n+2} + X^{3p+1} + X^{3q}$ est divisible par $X^2 + X + 1$.

Exercice 8. Montrer que pour tout $n \geq 1$, $nX^{n+2} - (n+2)X^{n+1} + (n+2)X - n$ est divisible par $(X-1)^3$.

Exercice 9. Montrer que $P_n = 1 + \frac{X}{1!} + \frac{X^2}{2!} + \cdots + \frac{X^n}{n!}$ n'admet pas de racines multiples.