Feuille d'exercices n° 15 : Dénombrement

Exercice 1 Les questions suivantes sont indépendantes :

1. Un code de carte bleue est constitué de 4 chiffres de 0 à 9. Combien y'a-t-il de codes différents ?
2. Combien y'a-t-il de tiercés lors d'une course de 11 chevaux ?
3. On dispose des fruits suivants : oranges, pommes, fraises, raisins, poires et ananas. Combien de types de jus différents peut-on créer ? (Un jus de fruits consiste en le mixage d'une ou de plusieurs variétés de fruits)

Exercice 2 Une classe est constituée de 35 élèves, chacun pouvant apprendre entre une et trois langues vivantes parmi l'anglais, l'espagnol et l'allemand :

- 28 apprennent anglais, 20 l'espagnol et 10 l'allemand,
- 13 apprennent anglais et espagnol, 7 apprennent anglais et allemand, 8 apprennent espagnol et allemand (au moins).

1. Combien apprennent seulement l'allemand ?
2. Combien sont trilingues ?
3. Combien sont bilingues ?

Exercice 3 Soit E l'ensemble des 43 élèves de la classe de BCPST1 année 2020-21 et F l'ensemble des 365 jours de l'année de leur (même!) année de naissance (on suppose qu'il sont tous nés en 2002 qui est non bissextile)

1. Donner le nombre d'applications de E dans F .
2. Donner le nombre d'applications injectives de E dans F .
3. En déduire le nombre d'applications non injectives de E dans F .
4. En supposant que les dates de naissances sont équiprobables, déterminer la probabilité pour que deux élèves de E soient nés le même jour. Justifier votre réponse.
(On rappelle qu'en cas d'équiprobabilité, la probabilité d'un événement A vaut :

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{\text{"nb de cas favorables"}}{\text{"nb de cas total"}}$$

Exercice 4

Soit k et n deux entiers naturels non nuls tel que $k \leq n$. De combien de façon peut-on se donner une k -liste $(i_1, i_2, \dots, i_k)$ d'entiers compris entre 1 et n dans les cas suivants :

1. les répétitions sont autorisées.
2. les répétitions ne sont pas autorisées.
3. (a) le critère $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$ doit être respecté.

- (b) Ecrire tous les couples (i_1, i_2) tels que $1 \leq i_1 < i_2 \leq 4$. Justifier que vous n'en avez pas oublié.

Exercice 5 On a n paires de chaussettes à ranger dans n tiroirs. Chaque tiroir peut contenir de 0 à n paires. Les répartitions sont équiprobables.

1. Quelle est la probabilité pour qu'il y ait une paire dans chaque tiroir ?
2. Quelle est la probabilité pour qu'il y ait exactement un tiroir vide ?

Exercice 6 Soit un jeu de dominos (on rappelle que chaque domino porte 2 nombres de $\llbracket 0, 6 \rrbracket$, éventuellement identiques et il n'y a qu'un seul domino de chaque sorte).

1. Combien y a-t-il de dominos dans le jeu ?
2. De combien de façons peut-on tirer 2 dominos qui soient compatibles ?
3. De combien de façons peut-on tirer 5 dominos dont au moins un double ?

Exercice 7 On désire former un jury composé de 2 scientifiques et 3 littéraires. On peut choisir les membres du jury parmi 5 scientifiques et 7 littéraires.

De combien de façons peut-on constituer le jury dans les cas suivants :

1. N'importe quel scientifique et n'importe quel littéraire peut-être choisi.
2. L'un des littéraires doit obligatoirement faire partie du jury.
3. Deux des scientifiques ne s'entendent pas et ne veulent pas faire partie du même jury.
4. Même question si ce sont deux littéraires qui ne s'entendent pas.

Exercice 8 On dispose de 10 billes que l'on veut placer sur un même rangée.

1. On suppose que les dix billes sont de couleurs différentes.
De combien de façons peut-on les ranger ?
2. On suppose qu'il y a 5 billes rouges, 2 blanches, et 3 vertes, et que l'on ne peut pas discerner les billes d'une même couleur.
 - (a) De combien de façons peut-on les ranger ?
 - (b) De combien de façons peut-on les ranger si l'on veut que les billes soit groupées par couleur ?
 - (c) Même question mais seules les rouges doivent être groupées.

Exercice 9 On appelle *main* tout ensemble de 13 cartes prises dans un jeu de 52 cartes.

1. Combien y a-t-il de mains différentes ?
2. Combien y a-t-il de mains différentes contenant :
 - (a) au moins 1 pique ?
 - (b) au plus 1 pique ?
 - (c) exactement un as et contenant au plus 2 piques ?

Exercice 10 Avec les lettres du mot LIVRE, combien de mots de 5 lettres peut-on former, ayant un sens ou non :

1. au total,
2. commençant et finissant par une voyelle,
3. commençant et finissant par une consonne,

4. commençant par une voyelle et finissant par une consonne,
5. commençant par une consonne et finissant par une voyelle.

Reprendre les questions précédentes avec les lettres du mot CONCOURS et les mots de 8 lettres.

Exercice 11 De combien de façons peut-on disposer $2n$ personnes (n hommes et n femmes) :

1. sur un banc contenant $2n$ places ?
2. autour d'une table ronde de $2n$ places ?

Répondre aux mêmes questions, en supposant que les hommes et les femmes sont alternés.

Exercice 12 Soit un ensemble de n personnes ($n \geq 2$). Chacune envoie une lettre et une seule à l'une quelconque des $n - 1$ autres personnes.

1. De combien de manières différentes les n lettres peuvent-elles être adressées ?
2. Une personne A étant choisie, répondre à la question précédente de telle sorte que A reçoive exactement p lettres ($0 \leq p < n$)

Exercice 13 *Formule de Van der Monde* Soit E et F deux ensembles disjoints de cardinaux n et m . En calculant de deux façons différentes le nombre de parties de $E \cup F$ ayant p éléments (p positif et inférieur à n et m) montrer que :

$$\binom{n+m}{p} = \binom{n}{0} \binom{m}{p} + \binom{n}{1} \binom{m}{p-1} + \cdots + \binom{n}{p} \binom{m}{0} = \sum_{i=0}^p \binom{n}{i} \binom{m}{p-i}$$

Exercice 14 *Applications strictement croissantes de $\llbracket 1, p \rrbracket$ dans $\llbracket 1, n \rrbracket$*

Soit n et p deux entiers non nuls. tels que $n \geq p$

1. Si $p > n$ justifier qu'il n'existe pas d'applications strictement croissantes de $\llbracket 1, p \rrbracket$ dans $\llbracket 1, n \rrbracket$.
2. Si $p \leq n$, quel est le nombre d'applications strictement croissantes de $\llbracket 1, p \rrbracket$ dans $\llbracket 1, n \rrbracket$?
(indication : considérer l'image de $\llbracket 1, p \rrbracket$ par f)

Exercice 15

1. Déterminer le nombre d'applications surjectives de $\llbracket 1, 5 \rrbracket$ dans $\llbracket 1, 4 \rrbracket$.
2. Plus généralement, déterminer le nombre d'applications surjectives de $\llbracket 1, p+1 \rrbracket$ dans $\llbracket 1, p \rrbracket$.