Exercice 6. On procède par récurrence forte, avec la proposition de récurrence :

$$\mathscr{P}(n) \equiv \text{"}n \text{ est premier ou produit de nombres premiers"}$$

Initialisation : Pour $n = 2$: 2 est premier donc $\mathscr{P}(2)$ est vérifié.

Hérédité : Soit $n \geq 2$ un entier fixé. Supposons que pour tout entier m compris entre 2 et n, $\mathscr{P}(m)$ est vraie. Montrons $\mathscr{P}(n+1)$.
Premier cas. Si $n+1$ est premier : alors $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
Deuxième cas. Si $n+1$ n'est pas premier ; alors par définition, $n+1$ admet un diviseur d autre que 1 et $n+1$:

$$n+1 = d \times d'$$

avec d' un entier. Puisque $n+1 \neq 0$, alors d et d' sont non-nuls. Ainsi $d > 1$, donc $d' = \frac{n+1}{d} < n+1$. Puisque $d \neq n+1$, alors $d' > 1$ et donc $d = \frac{n+1}{d'} < n+1$. Ainsi :

$$n+1 = d \times d' \quad \text{avec } 2 \leq d \leq n \text{ et } 2 \leq d' \leq n$$

Par hypothèse de récurrence, $\mathscr{P}(d)$ et $\mathscr{P}(d')$ sont tous les deux vrais : ainsi :
d est premier ou produit de nombres premiers,
d' est premier ou produit de nombre premiers.
Dans tous les cas, puisque $n+1 = d \times d'$, $n+1$ est produit de nombre premiers. Ainsi $\mathscr{P}(n+1)$ est établi.

D'après le principe de récurrence forte, tout entier $n \geq 2$ est premier ou produit de nombres premiers.

Exercice 11. *La correction utilise la partie entière $\lfloor x \rfloor$ d'un réel x, vue dans le chapitre sur les réels ; attendre la fin de ce chapitre pour l'étudier.*
Montrer que :

a) $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Big[n, +\infty\Big[= \Big[0, +\infty\Big[= \mathbb{R}_+$,

Correction. On va montrer deux inclusions.
$\subset$. Soit $x \in \displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \Big[n, +\infty\Big[$; ça signifie qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $x \in \Big[n, +\infty\Big[$. Or $\Big[n, +\infty\Big[\subset \Big[0, +\infty\Big[$, donc $x \in \Big[0, +\infty\Big[$.
$\supset$. Soit $x \in \Big[0, +\infty\Big[$. Alors il existe $n \in \mathbb{N}$ (prendre $n = 0$) tel que $x \in \Big[n, +\infty\Big[$; Donc $x \in \displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \Big[n, +\infty\Big[$.

b) $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \Big[n, +\infty\Big[= \varnothing$,

Correction. il suffit de montrer $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \Big[n, +\infty\Big[$ ne contient aucun élément.
Soit $x \in \displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \Big[n, +\infty\Big[$. Cela signifierait que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on aurait $x \in \Big[n, +\infty\Big[$. Mais c'est impossible puisque $x > 0$ (car en particulier $x \in \Big[1, +\infty\Big[$) et $x < \lfloor x \rfloor + 1 \in \mathbb{N}^*$. Donc $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \Big[n, +\infty\Big[$ est vide.

c) $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \Big]\frac{1}{n}, +\infty\Big[= \Big]0, +\infty\Big[= \mathbb{R}_+^*$,

Correction. On va montrer deux inclusions.
$\subset$. Soit $x \in \displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \Big]\frac{1}{n}, +\infty\Big[$; ça signifie qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $x \in \Big]\frac{1}{n}, +\infty\Big[$. Or $\Big]\frac{1}{n}, +\infty\Big] \subset \Big]0, +\infty\Big[$, donc $x \in \Big]0, +\infty\Big[$.
$\supset$. Soit $x \in \Big]0, +\infty\Big[$. Alors $0 \leq \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \leq \frac{1}{x} < \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor + 1$. Soit $n = \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor + 1 \in \mathbb{N}^*$; alors $0 < \frac{1}{x} < n \implies \frac{1}{n} < x$ donc $x \in \Big]\frac{1}{n}, +\infty\Big[$; Donc $x \in \displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \Big]\frac{1}{n}, +\infty\Big[$.

d) $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \Big[\frac{1}{n}, +\infty\Big[= \Big]0, +\infty\Big[= \mathbb{R}_+^*$,

Correction. On va montrer deux inclusions.
$\subset$. Soit $x \in \displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \Big[\frac{1}{n}, +\infty\Big[$; ça signifie qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $x \in \Big[\frac{1}{n}, +\infty\Big[$. Or $\Big[\frac{1}{n}, +\infty\Big] \subset \Big]0, +\infty\Big[$, donc $x \in \Big]0, +\infty\Big[$.
$\supset$. Soit $x \in \Big]0, +\infty\Big[$. Alors $0 \leq \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \leq \frac{1}{x} < \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor + 1$. Soit $n = \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor + 1 \in \mathbb{N}^*$; alors $0 < \frac{1}{x} < n \implies \frac{1}{n} < x$ donc $x \in \Big[\frac{1}{n}, +\infty\Big[$; Donc $x \in \displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \Big[\frac{1}{n}, +\infty\Big[$.

e) $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \Big[0, \frac{1}{n}\Big[= \Big\{0\Big\}$,

Correction. On va montrer deux inclusions.
$\supset$. On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 < \frac{1}{n}$ et donc $0 \in \left[0, \frac{1}{n}\right[$; ainsi $0 \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \left[0, \frac{1}{n}\right[$.
$\subset$. Soit $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \left[0, \frac{1}{n}\right[$. Cela signifie que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, $x \in \left[0, \frac{1}{n}\right[$. Montrons par l'absurde que $x = 0$. Sinon, on aurait $x > 0$, et donc $0 \leq \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \leq \frac{1}{x} < \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor + 1$, et donc en prenant $n = \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor + 1 \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{n} < x$. Ainsi $x \notin \left[0, \frac{1}{n}\right[$; contradictoire. Donc $x = 0$.

f) $\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \left]0, \frac{1}{n}\right[= \varnothing$.

Correction. il suffit de montrer $\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \left]0, \frac{1}{n}\right[$ ne contient aucun élément.

Soit $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \left]0, \frac{1}{n}\right[$. Cela signifie que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, $x \in \left]0, \frac{1}{n}\right[$. Aboutissons par le même argument que précédemment à une contradiction. Nécessairement $x > 0$ car en particulier $x \in]0, 1[$ (en prenant $n = 1$). Donc $0 \leq \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \leq \frac{1}{x} < \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor + 1$, et donc en prenant $n = \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor + 1 \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{n} < x$. Ainsi $x \notin \left[0, \frac{1}{n}\right[$; contradictoire.