Lycée Fénelon
Année 2021-2022

BCPST1
Logique et raisonnement

Fiche d'Exercices 1 : Logique, raisonnement, ensembles

Logique

Exercice 1.

1. Donner la contraposée des implications suivantes
   (a) $x \neq 1 \implies f(x) \neq 0$
   (b) $x \neq y \implies f(x) \neq f(y)$
2. Formuler la négation des propositions suivantes :
   (a) $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geqslant 0$
   (b) $\exists x \in \mathbb{R}, f(x) = 0$
   (c) $\exists a \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, |f(x)| \leqslant a$
   (d) $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in N, (n \geqslant n_0 \implies |u_n - L| \leqslant \varepsilon)$
3. Soit F une ensemble de fonctions. On considère les deux propositions :
   $A :\ \forall f \in F,\ \exists x \in \mathbb{R},\ f(x) = 0$
   $B :\ \exists x \in \mathbb{R},\ \forall f \in F,\ f(x) = 0$
   Laquelle des deux implications $A \implies B$ et $B \implies A$ est toujours vraie ? Laquelle est fausse (donner un contre-exemple) ?

Raisonnements

Exercice 2. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax + b$. Montrer que f garde un signe constant sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $a = 0$.
Indication. Considérer les deux propositions :

$$\begin{array}{lcl} P & : & f \text{ garde un signe constant} \\ Q & : & a = 0 \end{array}$$

Montrer que $Q \implies P$ par un raisonnement direct, et $P \implies Q$ par contraposition.

Exercice 3.

1. Soit f une fonction réelle strictement croissante. Montrer que :

$$\forall (x, y) \in \mathscr{D}_f{}^2,\ x < y \iff f(x) < f(y)\ .$$

2. Que peut-on dire des deux assertions suivantes ?

$$\begin{array}{lcl} P & : & f \text{ est strictement croissante} \\ Q & : & \forall\,(x,y) \in \mathscr{D}_f{}^2,\ x < y \iff f(x) < f(y) \end{array}$$

3. Soit f une fonction réelle vérifiant :

$$\forall\,(x,y) \in \mathscr{D}_f{}^2,\ x \leqslant y \iff f(x) \leqslant f(y)\ .$$

   Que peut-on dire de f ?
4. En déduire 3 assertions équivalentes à l'assertion "f est strictement croissante".

Exercice 4. Montrer que pour tout entier $n \geqslant 2$, et tout nombre réel $x > -1$ non-nul, on a :

$$(1+x)^n > 1 + nx$$

Exercice 5. On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = u_1 = 1 \\ u_{n+2} = \dfrac{u_{n+1} + 4u_n}{3u_{n+1} + 2u_n} \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Montrer que la suite (u_n) est constante.

Exercice 6. On rappelle qu'un entier naturel n est un *nombre premier* si $n \geqslant 2$ et n n'a aucun diviseur autre que 1 et n.
Montrer que tout entier naturel $\geqslant 2$ est soit premier soit un produit de nombres premiers. (Indication : procéder par récurrence forte)

Ensembles

Exercice 7. Soit $A = \varnothing$ et B deux sous-ensembles de E.
Simplifier l'écriture suivante : $(A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)$.

Exercice 8. Soit A et B deux parties d'un ensemble E. Simplifier l'écriture suivante : $\overline{B} \cup \left(\overline{\overline{\overline{A} \cap B} \cap \overline{A}} \right)$.

Exercice 9. Soient A, B deux sous-ensembles de E.
Vérifier les égalités suivantes :

a) $A = (A \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$,

b) $\overline{A \cup \overline{B}} = B \setminus A$,

Exercice 10. Soient A, B, C trois ensembles. Montrer que
s'il existe un ensemble C tel que $A \cap C = B \cap C$ et $A \cup C = B \cup C$, alors $A = B$.
(*Indication : Montrer deux inclusions*).

Compléments

Exercice 11. Montrer que :

a) $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Big[n, +\infty\Big[= \Big[0, +\infty\Big[= \mathbb{R}_+,$

b) $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \Big[n, +\infty\Big[= \varnothing,$

c) $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \left]\frac{1}{n}, +\infty\right[= \Big]0, +\infty\Big[= \mathbb{R}_+^*,$

d) $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \left[\frac{1}{n}, +\infty\right[= \Big]0, +\infty\Big[= \mathbb{R}_+^*,$

e) $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \left[0, \frac{1}{n}\right[= \Big\{0\Big\},$

f) $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \left]0, \frac{1}{n}\right[= \varnothing.$