Exercice 17. On utilise le fait démontré (Chapitre 1) qu'il existe une infinité de nombres premiers, pour prouver que

$$\inf\left\{\frac{1}{p} \mid p \text{ est premier}\right\} = 0$$

Clairement 0 est un minorant car l'inverse d'un nombre > 0 est positif. Montrons par l'absurde que de tous les minorants, 0 est le plus grand :
Supposons donc qu'il existe $m > 0$ tel que pour tout nombre premier p, $\frac{1}{p} \geq m > 0$. Alors, en passant à l'inverse, pour tout premier p :

$$p \leq \frac{1}{m}$$

En particulier le réel $\frac{1}{m}$ serait un majorant de l'ensemble des nombres premiers. Mais puisqu'il n'existe qu'un nombre fini d'entiers inférieurs à $\frac{1}{m}$, il ne pourrait exister qu'un nombre fini de nombres premiers ; contradiction.

Exercice 18.
1. Soit $m \in \mathbb{N}^*$ quelconque ; alors $m \geq 1$ et donc :

$$\frac{1}{m} \leq 1 \implies -1 \leq -\frac{1}{m}$$

Puisque d'autre part $-\frac{1}{m} < 0$, pour tout $m \in \mathbb{N}^*$:

$$-1 \leq -\frac{1}{m} < 0$$

D'autre part, si $n \in \mathbb{N}^*$, alors $n \geq 1$ et donc $0 < \frac{1}{n} \leq 1$; en ajoutant terme à terme ces deux dernières inégalités : pour tout $(m,n) \in (\mathbb{N}^*)^2$:

$$-1 < \frac{1}{n} - \frac{1}{m} < 1$$

2. Supposons que B admette pour plus grand élément M. Alors il existe un couple d'entiers naturels non-nuls (n,m) tels que :

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{m} = M$$

Mais alors B contient aussi :

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{m+1} > \frac{1}{n} - \frac{1}{m} = M$$

Contradiction : ainsi B ne contient pas de maximum.
De même supposons que B contienne un minimum m ; alors il existe un couple d'entiers naturels non-nuls (n,m) tels que :

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{m} = m$$

Mais alors B contient aussi :

$$\frac{1}{n+1} - \frac{1}{m} < \frac{1}{n} - \frac{1}{m} = m$$

Contradiction : ainsi B ne contient pas de minimum.

3. Puisque B est majoré, il admet une borne supérieure. Montrons que $\sup B = 1$ par l'absurde en supposant que tous le majorants de B, 1 ne soit pas le plus petit. Supposons donc que B admette un majorant $M < 1$. Ainsi pour tout entiers naturels n, m non nuls :

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{m} < M < 1$$

En particulier pour $n = 1$ et pour tout $m \in \mathbb{N}^*$:

$$1 - \frac{1}{m} \leq M < 1 \implies -\frac{1}{m} \leq M - 1 < 0 \implies \frac{1}{m} \geq 1 - M > 0 \implies m \leq \frac{1}{1-M}$$

Ainsi l'ensemble des entiers naturels serait majoré par le réel $\frac{1}{1-M}$: contradiction. Ainsi $\sup B = 1$.

4. Puisque B est minoré, il admet une borne inférieure. Montrons que $\inf B = -1$ par l'absurde en supposant que tous le minorants de B, -1 ne soit pas le plus grand. Supposons donc que B admette un minorant $M' > -1$. Ainsi pour tout entiers naturels n, m non nuls :

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{m} > M' > -1$$

En particulier pour $m = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\frac{1}{n} - 1 \geq M' > -1 \implies \frac{1}{n} \geq M' + 1 > 0 \implies n \leq \frac{1}{M'+1}$$

Ainsi l'ensemble des entiers naturels serait majoré par le réel $\frac{1}{M'+1}$: contradiction. Ainsi $\inf B = -1$.