Fiche d'Exercices 2
Nombres réels

Equations, Inéquations, Inégalités

Exercice 1. Résoudre les inéquations suivantes, d'inconnue x réelle :
(a) $1 - x^4 \geqslant 0$ (b) $(x-1)^2 \leqslant 1$ (c) $(x-1)^2 \leqslant x$ (d) $A \leqslant x^2$ (où A est un paramètre réel).

Exercice 2. Résoudre en discutant selon les valeurs du paramètre $m \in \mathbb{R}$, l'inéquation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$: $(x+1)^2 \leqslant mx$.

Exercice 3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les systèmes de deux équations suivants :

$$\text{(a)} \begin{cases} x+y &= 2 \\ xy &= 1 \end{cases} \qquad \text{(b)} \begin{cases} x+y &= 1 \\ xy &= 1 \end{cases}$$

$$\text{(c)} \begin{cases} x+y &= m \\ xy &= 1 \end{cases} \qquad \text{(Discuter selon les valeurs de } m \in \mathbb{R})$$

Exercice 4. Démontrer que :

$$\begin{cases} 2 \leqslant a \leqslant 3 \\ 1 \leqslant b \leqslant 2 \end{cases} \implies 2 \leqslant a^2 - \frac{2}{b} \leqslant 8$$

Exercice 5. Résoudre les équations d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:
(a) $|x-1| = 3$ (b) $|x-2| = |x+1|$ (c) $|x-3| = 2x+1$ (d) $|x-4| = x^2 - 1$.

Exercice 6. On suppose que : $2 \leqslant |a| \leqslant 4$ et $5 \leqslant |b| \leqslant 6$. Encadrer $|a+b|$, $|a+2b|$, $|a-2b|$ et $\dfrac{a^2|b+1|}{|a-2b|}$ en utilisant l'inégalité triangulaire.

Exercice 7. Démontrer que :

$$\text{(a) } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \frac{2n+2}{2n+3} \leqslant \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+2}} \qquad \text{(b) } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \frac{n^n}{n!} \geqslant n$$

(c) Soit $u_n = \dfrac{(n!)^2}{(2n)!} 4^n$ pour $n \in \mathbb{N}$. Calculer $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$. Démontrer que la suite (u_n) est croissante et en déduire l'inégalité : $\dfrac{1}{(n!)^2} \leqslant \dfrac{4^n}{(2n)!}$, pour tout n de $\mathbb{N}$.

Pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$, on note $n!$, dénommé "*factorielle* n", l'entier défini par :

$$\begin{cases} 0! = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad n! = 1 \times 2 \times \cdots \times n \end{cases}$$

Notons que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$:

$$(n+1)! = (n+1) \times n!$$

Exercice 8. Démontrer les inégalités suivantes :

1. (a) Démontrer que : $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall a \in \mathbb{R},\ x - \sqrt{x^2 + a^2} \leqslant 0$
   (b) Quel est le signe de $x + \sqrt{x^2 + a^2}$? (où a et x sont des réels quelconques.)
2. Résoudre les inéquations suivantes :
   (a) $x - 2 < \sqrt{x+1}$
   (b) $\sqrt{x^2 - 4} \leqslant x - 4$

Exercice 9. Démontrer les inégalités suivantes et en donner une interprétation géométrique. (*Indication :* Déterminer le signe de la différence à l'aide d'une étude de fonction.)

1. $\forall x \in \mathbb{R},\ e^x \geqslant x + 1.$
2. $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \ln x \leqslant x - 1$
3. $\forall x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[,\ \sin x \leqslant x \leqslant \tan x$
4. $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ x - \dfrac{x^3}{6} \leqslant \sin x \leqslant x$, puis retrouver la valeur de $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x}$.
5. $\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad 1 + \dfrac{x}{1!} + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^4}{4!} \geqslant 0.$

Exercice 10. Déterminer l'ensemble des x réels tels que $\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right| \leqslant 2.$

Exercice 11. Montrer que pour tout x réel strictement positif : $\quad x + \dfrac{1}{x} \geqslant 2$

Exercice 12. Soit x et y des réels. Montrer que :

1. $1 + |xy - 1| \leqslant (1 + |x-1|)\,(1 + |y-1|)$ (indication : se ramener à l'inégalité triangulaire.)
2. $|x| + |y| \leqslant |x+y| + |x-y|$ (indication : discuter selon les signes de x et de y.)

Partie entière

Exercice 13. Soient $x \in \mathbb{R}$, $(n,m) \in \mathbb{Z}^2$:

1. Calculer $\lfloor -x \rfloor$ en fonction de $\lfloor x \rfloor$. Distinguer selon les cas $x \in \mathbb{Z}$ et $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.
2. Calculer $\lfloor 1-x \rfloor$ en fonction de $\lfloor x \rfloor$.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $\lfloor x+n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n$.
4. Montrer que pour tout $y \in \mathbb{R}$, $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leqslant \lfloor x+y \rfloor \leqslant \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1$.
5. Montrer que : $\left\lfloor \dfrac{n+m}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \dfrac{n-m+1}{2} \right\rfloor = n$
   (Discuter suivant la parité de $n+m$)

Exercice 14.

1. (a) Montrer que pour tout réel x, $x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x$.
   (b) En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\lfloor x \rfloor}{x}$.
2. On définit la fonction f par $f(x) = \dfrac{\lfloor x \rfloor}{x}$, pour $x \geq 0$.
   (a) Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ de f.
   (b) Déterminer $f(x)$ lorsque $x \in]0,1[$. En déduire $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$.
   (c) Déterminer $f(n)$ pour tout entier naturel n non nul.
   (d) Montrer que pour tout réel $x \in \mathcal{D}_f$, on a $0 \leq f(x) \leq 1$.
   (e) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Exprimer $f(x)$ lorsque x appartient à l'intervalle $[n, n+1[$. En déduire la valeur de la limite à gauche de $f(x)$ en $n+1$:
   $$\lim_{\substack{x \to n+1 \\ x \leq n+1}} f(x)$$
   (f) Tracer l'allure la plus précise possible de la courbe représentative de f (on veillera à bien tenir compte des résultats obtenus précédemment).

Bornes supérieures et bornes inférieures

Exercice 15. Soit $A = \left\{ \dfrac{1}{2n+1} \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \right\}$.
Montrer que $\inf(A) = 0$. Pour cela, justifier que 0 est un minorant de A, puis prouver par l'absurde que 0 est le plus grand minorant de A.

Exercice 16. Quelles sont les bornes supérieure et inférieure de l'ensemble

$$\left\{ \frac{1}{n} + (-1)^n,\ n \in \mathbb{N}^* \right\}$$

Exercice 17. Déterminer :

$$\inf \left\{ \frac{1}{p} \;\middle|\; p \in \mathbb{N} \text{ et } p \text{ est premier} \right\} .$$

Exercice 18. Soit B la partie de $\mathbb{R}$ suivante : $B = \left\{ \frac{1}{n} - \frac{1}{m}, \forall (n,m) \in \mathbb{N}^{*2} \right\}$

1. Démontrer que pour tout entier naturel m non nul : $-1 \leqslant -\frac{1}{m} < 0$, en déduire que pour tout couple d'entiers naturels non nuls (n,m), on a : $-1 < \frac{1}{n} - \frac{1}{m} < 1$. La partie B est donc bornée : -1 est un minorant et 1 un majorant de B.
2. Démontrer que B n'admet pas de plus grand élément et pas de plus petit élément non plus (on raisonnera par l'absurde).
3. Quelle est la valeur de la borne supérieure de B ? (justifier par un raisonnement par l'absurde)
4. Et pour la borne inférieure de B ?