Lycée Fénelon
Année 2021-2022

BCPST1
Trigonométrie

Fiche d'Exercices n°3 : Trigonométrie

Exercice 1. Résoudre les équations suivantes :

a) $\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=1$, **b)** $2\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{3}$, **c)** $\sqrt{3}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=2$

d) $2\cos\left(\frac{x}{3}-\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{3}$ **e)** $\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)-\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=0$

f) $\cos(x)+\sin(x)=1$ **g)** $\cos(x)-\sqrt{3}\sin(x)=0$ **h)** $\sin(2x)-\cos(2x)=1$.

Exercice 2. Résoudre :

$$2\cos^2(x)=7\cos(x)-3 \quad ; \quad \begin{cases} 2\sin(x)-4\cos(x)=\sqrt{3}+2 \\ \sin(x)+\sqrt{3}\cos(x)=0 \end{cases}$$

Exercice 3.

a) Établir à l'aide des développements de $\cos(a+b)$, $\cos(a-b)$, $\sin(a+b)$ et $\sin(a-b)$ les formules suivantes :

$$\cos(a)\cos(b)=\frac{1}{2}\left(\cos(a+b)+\cos(a-b)\right)$$
$$\sin(a)\sin(b)=\frac{1}{2}\left(\cos(a-b)-\cos(a+b)\right)$$
$$\sin(a)\cos(b)=\frac{1}{2}\left(\sin(a+b)+\sin(a-b)\right)$$

b) Appliquer ces formules pour linéariser [1] $\cos^2(\theta)\sin(\theta)$ et $\cos(2\theta)\sin^2(\theta)$.

c) Appliquer ces formules pour montrer que si p et q sont deux entiers tels que $p\neq\pm q$:

$$\int_0^{2\pi}\cos(px)\cos(qx)dx=0\ .$$

Exercice 4. On pose $t=\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$. Montrer que :

$$\frac{1}{1+t^2}=\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

1. Linéariser signifie transformer un produit en somme. Par exemple $\cos^2(x)=\frac{\cos(2x)}{2}+\frac{1}{2}$.

puis démontrer les formules :

$$\cos(\theta) = \frac{1-t^2}{1+t^2} \qquad ; \qquad \sin(\theta) = \frac{2t}{1+t^2}$$

Exercice 5. Résoudre les inéquations suivantes :

a) $\cos(x) \leqslant -\frac{\sqrt{3}}{2}$, **b**) $-\sqrt{2} \leqslant 2\sin(x) \leqslant 1$, **c**) $-\sqrt{3} \leqslant \tan(x) \leqslant 1$

d) $\sqrt{6}\cos(2x) - \sqrt{2}\sin(2x) \geqslant 0$ **e**) $\sin^2(x) + 3\cos(x) - 1 \leqslant 0$

Indication : on commencera par les résoudre sur un intervalle de la forme $]-\pi, +\pi]$, $[0, 2\pi[$, ou autre, bien choisi. On s'aidera d'un dessin du cercle trigonométrique.

Exercice 6. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}, \quad \overbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}^{n-1 \text{ chiffres } 2} = 2\cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right).$$

En déduire les expressions de $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$, $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$, $\cos\left(\frac{\pi}{16}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{16}\right)$.