Lycée Fénelon	Mathématiques
Année 2021/22	BCPST1

Feuille d'Exercices 4

Fonctions réelles usuelles

Exercice 1.

a) Justifier que 100 000 n'est pas une puissance de 2 (une puissance de 2 est un nombre pouvant s'écrire sous la forme 2^n avec $n \in \mathbb{Z}$.)
b) Déterminer le plus grand entier n tel que $2^n < 100\,000$.
c) Pour la recherche d'une bactérie nocive dans l'alimentation, on place un peu de résidu de l'aliment considéré dans une boîte de Pétri. En considérant que la population de bactérie double chaque jour, et qu'elle devient détectable à partir de 100 000 individus, au bout de combien de jours pourra-t-on être sûr de détecter son éventuelle présence ?

Exercice 2. Étudier la parité de la fonction : $x \longmapsto (1-x^2)\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$.

Exercice 3. Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes :
a) $x \mapsto e^{x\ln(\sin(x))}$
b) $x \mapsto x^{\tan(x)} = e^{\tan(x)\ln(x)}$
c) $x \mapsto xe^{\frac{2x}{x^2-1}}$
d) $x \mapsto e^{\frac{1}{x}}\sqrt{x-1}$
e) $x \mapsto x^x$

Exercice 4.

Montrer les inégalités suivantes :

1. $\forall x > -1,\ \ln(1+x) \leq x$
2. $\forall x \in \mathbb{R},\ 1-x \leq \exp(-x)$
3. $\forall x \geq 0,\ x - \dfrac{x^2}{2} \leq \ln(1+x)$
4. $\forall x \geq 0,\ \exp(-x) \leq 1 - x + \dfrac{x^2}{2}$

Exercice 5. Les fonctions suivantes sont-elles majorées, minorées, bornées sur E ? Admettent-elles un maximum, un minimum, une borne supérieure, une borne inférieure?

a) $E = \mathbb{R}$ et $f(x) = -x^2+5$
b) $E = \mathbb{R}$ et $f(x) = \dfrac{1}{2+\sin(x)}$
c) $E = \mathbb{R}$ et $f(x) = \dfrac{1}{x^2+x+1}$
d) $E =]0,+\infty[$ et $f(x) = x\left\lfloor \dfrac{1}{x} \right\rfloor$

Exercice 6.
a) Résoudre dans $\mathbb{R}_+^*$ l'équation : $x^{x^3} = (x^x)^3$.
b) Résoudre l'inéquation : $\ln(x+3) - \ln(x-1) \geqslant 1$.

Étude de fonction.

Exercice 7. Soit f la fonction définie par $f(x) = (1+2x)^{\frac{1}{x}}$.
a) Déterminer l'ensemble de définition de f.
b) Calculer $f'(x)$ en tout point x où f est dérivable.
c) Étudier les variations de f. On pourra écrire la dérivée de f sous la forme $f'(x) = \dfrac{u(x)f(x)}{x^2}$ et étudier la fonction u pour trouver son signe.
d) Représenter graphiquement la fonction f.

Exercice 8. Étudier et représenter les fonctions suivantes :
(1) $f : x \mapsto -2\sin^2 x + 2\sin x + 1$
(2) $g : x \mapsto \dfrac{3\cos x}{2\cos x - 1}$

Exercice 9. On considère la fonction : $\mathrm{th} : x \mapsto \mathrm{th}(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$.
a) Déterminer l'ensemble de définition $\mathscr{D}_{\mathrm{th}}$ de th.
b) Montrer que pour tout $x \in \mathscr{D}_{\mathrm{th}}$, $-1 < \mathrm{th}(x) < 1$.
c) Montrer que th est dérivable et que $\mathrm{th}' = 1 - \mathrm{th}^2$.
d) Finir l'étude de la fonction th : réduction du domaine d'étude, variations, limites aux bornes.
e) Déterminer l'équation de la tangente au point d'abscisse 0 de la courbe représentative $\mathscr{C}_{\mathrm{th}}$ de th, et étudier la position de la courbe par rapport à cette tangente.
f) Tracer l'allure de la courbe représentative de th.