Lycée Fénelon
Année 2021-2022

BCPST1
Nombres complexes

Fiche d'Exercices n°5 : Nombres complexes

Exercice 1. Mettre sous forme algébrique ($a + \mathrm{i}b$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$) les nombres complexes suivants :

$$z_1 = (1+\mathrm{i})^3 \ ; \ z_2 = \frac{(1+\mathrm{i})^2}{1-\mathrm{i}} \ ; \ z_3 = \frac{(1-\mathrm{i})^2}{1+\mathrm{i}} \ ; \ z_4 = \frac{1}{(1+2\mathrm{i})(3-\mathrm{i})} \ ; \ z_5 = \left(\frac{1+\mathrm{i}}{2-\mathrm{i}}\right)^2$$

Avant de se lancer dans le calcul de z_3, on cherchera une relation simple entre z_3 et z_2.

Exercice 2. Mettre sous forme exponentielle les nombres complexes suivants :

$$z_1 = 3 + 3i\,, \quad z_2 = -1 - \mathrm{i}\sqrt{3}\,, \quad z_3 = -\frac{4}{3}\,\mathrm{i}\,, \quad z_4 = -2\,, \quad z_5 = \left(-\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3,$$

$$z_6 = \left(\frac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{1-\mathrm{i}}\right)^{20}, \quad z_7 = \frac{(-1-\mathrm{i})^9}{(1-\mathrm{i})^7}, \quad z_8 = \left(\frac{1+\mathrm{i}-\sqrt{3}(1-\mathrm{i})}{1+\mathrm{i}}\right)^2$$

Exercice 3.
a. Écrire l'expression $1 + \cos\phi + i\sin\phi$ sous la forme $a\exp^{\mathrm{i}\theta}$ avec $(a, \theta) \in \mathbb{R}^2$.
Indication : On pourra mettre sous forme exponentielle le nombre $\cos\phi + i\sin\phi$.
b. En déduire l'écriture sous forme exponentielle de $1 + \cos\phi + i\sin\phi$ (on discutera selon les valeurs de ϕ), puis celle de $(1 + \cos\phi + \mathrm{i}\sin\phi)^n$ pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 4.
a. Démontrer que pour tout $u, v \in \mathbb{C}$,

$$|u+v|^2 + |u-v|^2 = 2(|u|^2 + |v|^2)$$

b. En déduire l'inégalité :

$$|u| + |v| \leqslant |u+v| + |u-v|$$

c. Interpréter géométriquement ces deux relations dans un parallélogramme.

Exercice 5. On pose $u = \exp^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{7}}$, $S = u + u^2 + u^4$ et $T = u^3 + u^5 + u^6$.

1. Montrer que S et T sont conjugués et que la partie imaginaire de S est positive.
2. Calculer $S+T$ et ST. En déduire S et T.

Exercice 6. Montrer que si $|z| = |z'| = 1$ et si $1 + zz' \neq 0$ alors le nombre $\dfrac{z+z'}{1+zz'}$ est réel.

Exercice 7. Déterminer l'ensemble des nombres complexes $z \in \mathbb{C}$ tels que :
a. $\dfrac{z+1}{z-1}$ soit un réel.
b. $\dfrac{z+1}{z-1}$ soit un imaginaire pur.

Exercice 8. Linéariser :

$$\cos(\theta)\sin^2(\theta), \quad \sin(\theta)\cos^2(\theta), \quad \sin(x)\cos^3(x), \quad \cos(2x)\sin^3(x).$$

Problème. (DS1 2017-18). Le but de l'exercice est de déterminer les cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire sur les nombres complexes.

1. Questions de cours.
   a) Rappeler l'inégalité triangulaire, qui donne l'encadrement du module $|z_1 + z_2|$ de deux nombres complexes z_1 et z_2. (On ne demande pas de la démontrer).
   b) Lorsque x_1 et x_2 sont deux <u>nombres réels</u>, à quelle condition a-t-on $|x_1 + x_2| = |x_1| + |x_2|$? (On ne demande pas de justifier.)

   Nous allons dans cet exercice généraliser cette dernière condition, dans le cas où z_1 et z_2 sont deux nombres complexes non nuls.
2. Généralisation au cas des nombres complexes non nuls.
   Dans tout ce qui suit z_1 et z_2 sont deux nombres complexes non nuls.
   a) Montrer que :
   $$|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2.Re(z_1.\overline{z_2})$$
   b) Exprimer $Re(z_1.\overline{z_2})$ en fonction de $|z_1.\overline{z_2}|$ et de $\arg(z_1.\overline{z_2})$.
   c) En déduire que $|z_1+z_2] = |z_1|+|z_2|$ si et seulement si $\cos(\arg(z_1.\overline{z_2})) = 1$.
   d) En déduire que $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$ si et seulement si $\arg(z_1) = \arg(z_2)\ [2\pi]$.
3. On s'intéresse maintenant au cas d'égalité dans la partie minoration.
   a) Soient x_1 et x_2 deux nombres réels. Montrer que $||x_1| - |x_2|| = |x_1 + x_2|$ si et seulement si x_1 et x_2 sont de signes opposés.
   b) Soient z_1 et z_2 deux nombres complexes non nuls. Déterminer à quelle condition : $||z_1| - |z_2|| = |z_1 + z_2|$.
   (*Indication : on pourra procéder de manière analogue à la partie 2.*)