Problème

1. Questions de cours.

1.a) Inégalité triangulaire : pour tout $z_1 \in \mathbb{C}$, $z_2 \in \mathbb{C}$:

$$||z_1| - |z_2|| \leqslant |z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$$

1.b) Pour tout $x_1 \in \mathbb{R}$, $x_2 \in \mathbb{R}$, on a $|x_1 + x_2| = |x_1| + |x_2|$ si et seulement si x_1 et x_2 ont même signe.

2. Généralisation au cas complexe.

2.a) On applique la formule : $|Z|^2 = Z.\overline{Z}$:

$$\begin{aligned}
|z_1 + z_2|^2 &= (z_1 + z_2) \cdot \overline{(z_1 + z_2)} \\
&= (z_1 + z_2) \cdot (\overline{z_1} + \overline{z_2}) \\
&= z_1\overline{z_1} + z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_1} + z_2\overline{z_2} \\
&= |z_1|^2 + |z_2|^2 + z_1\overline{z_2} + \overline{z_1}z_2 \\
&= |z_1|^2 + |z_2|^2 + z_1\overline{z_2} + \overline{z_1\overline{z_2}} \\
&= |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2.Re(z_1\overline{z_2})
\end{aligned}$$

puisque $Z + \overline{Z} = 2.Re(Z)$.

2.b) On a $Re(z_1\overline{z_2}) = |z_1\overline{z_2}| \cdot \cos(\arg(z_1\overline{z_2}))$.
(Car $\forall\, Z \in \mathbb{C}^*$, $Z = |Z|.(\cos(\arg(Z)) + i.\sin(\arg(Z)))$.)

2.c) On a :

$$\begin{aligned}
& |z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2| \\
\Longleftrightarrow\ & |z_1 + z_2|^2 = (|z_1| + |z_2|)^2 \qquad \text{(car tout est positif)} \\
\underset{2.a)}{\Longleftrightarrow}\ & |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2.Re(z_1\overline{z_2}) = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2.|z_1|.|z_2| \\
\Longleftrightarrow\ & Re(z_1\overline{z_2}) = |z_1|.|z_2| \\
\underset{|z|=|\overline{z}|}{\Longleftrightarrow}\ & Re(z_1\overline{z_2}) = |z_1|.|\overline{z_2}| \\
\underset{2.b)}{\Longleftrightarrow}\ & |z_1\overline{z_2}| \cdot \cos(\arg(z_1\overline{z_2})) = |z_1\overline{z_2}| \\
\underset{|z_1\overline{z_2}|\neq 0}{\Longleftrightarrow}\ & \cos(\arg(z_1\overline{z_2})) = 1
\end{aligned}$$

2.d) Ainsi, d'après 2.c) :

$$\begin{aligned}
& |z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2| \\
\Longleftrightarrow\ & \cos(\arg(z_1\overline{z_2})) = 1 \\
\Longleftrightarrow\ & \cos(\arg(z_1\overline{z_2})) = \cos(0) \\
\Longleftrightarrow\ & \begin{cases} \arg(z_1\overline{z_2}) = 0 \quad [2\pi] \\ ou \\ \arg(z_1\overline{z_2}) = -0 \quad [2\pi] \end{cases} \\
\Longleftrightarrow\ & \arg(z_1\overline{z_2}) = 0 \quad [2\pi] \\
\Longleftrightarrow\ & \arg(z_1) + \arg(\overline{z_2}) = 0 \quad [2\pi] \\
\Longleftrightarrow\ & \arg(z_1) - \arg(z_2) = 0 \quad [2\pi] \\
\Longleftrightarrow\ & \boxed{\arg(z_1) = \arg(z_2) \quad [2\pi]}
\end{aligned}$$

Ainsi, pour tout z_1, z_2 deux complexes non nuls :

$$|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2| \iff \arg(z_1) = \arg(z_2) \quad [2\pi]$$

(*Remarque*. Lorsque z_1 ou z_2 est nul, on a toujours $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$.)

3. Cas de l'égalité dans la minoration : $||z_1| - |z_2|| = |z_1 + z_2|$.

3.a) Soit deux réels x_1, x_2 ; les deux membres de l'égalité étant positifs, on peut élever au carré sans perdre l'équivalence :

$$\begin{aligned}
& |x_1 + x_2| = ||x_1| - |x_2|| \\
\Longleftrightarrow\ & |x_1 + x_2|^2 = ||x_1| - |x_2||^2 \\
\Longleftrightarrow\ & (x_1 + x_2)^2 = (|x_1| - |x_2|)^2 \\
\Longleftrightarrow\ & x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 = |x_1|^2 + |x_2|^2 - 2|x_1|.|x_2| \\
\Longleftrightarrow\ & x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 = x_1^2 + x_2^2 - 2|x_1|.|x_2| \\
\Longleftrightarrow\ & x_1x_2 = -|x_1x_2| \\
\Longleftrightarrow\ & x_1x_2 \leqslant 0 \\
\Longleftrightarrow\ & x_1 \text{ et } x_2 \text{ sont de signes opposés.}
\end{aligned}$$

3.b) On procède de façon analogue à la question 2.c), en appliquant les résultats établis en 2.a) et 2.b) :

$$\begin{aligned}
& |z_1+z_2| = ||z_1|-|z_2|| \\
\iff & |z_1+z_2|^2 = ||z_1|-|z_2||^2 \\
\underset{2.a)}{\iff} & |z_1|^2+|z_2|^2+2.Re(z_1\overline{z_2}) = |z_1|^2+|z_2|^2-2.|z_1|.|z_2| \\
\iff & Re(z_1\overline{z_2}) = -|z_1|.|z_2| \\
\iff & Re(z_1\overline{z_2}) = -|z_1|.|\overline{z_2}| \\
\underset{2.b)}{\iff} & |z_1\overline{z_2}|\cdot\cos\left(\arg(z_1\overline{z_2})\right) = -|z_1\overline{z_2}| \\
\underset{|z_1\overline{z_2}|\neq 0}{\iff} & \cos\left(\arg(z_1\overline{z_2})\right) = -1 \\
\iff & \cos\left(\arg(z_1\overline{z_2})\right) = \cos(\pi) \\
\iff & \left\{\begin{array}{l} \arg(z_1\overline{z_2}) = \pi \quad [2\pi] \\ ou \\ \arg(z_1\overline{z_2}) = -\pi \quad [2\pi] \end{array}\right. \\
\iff & \arg(z_1\overline{z_2}) = \pi \quad [2\pi] \\
\iff & \arg(z_1)+\arg(\overline{z_2}) = \pi \quad [2\pi] \\
\iff & \arg(z_1)-\arg(z_2) = \pi \quad [2\pi] \\
\iff & \boxed{\arg(z_1) = \pi+\arg(z_2) \quad [2\pi]}
\end{aligned}$$

Ainsi, pour tout z_1, z_2 deux complexes non nuls :

$$|z_1+z_2| = ||z_1|-|z_2|| \iff \arg(z_1) = \pi+\arg(z_2) \quad [2\pi]$$

(*Remarque.* Lorsque z_1 ou z_2 est nul, on a toujours $|z_1+z_2| = ||z_1|-|z_2||$.)