

Fiche d'Exercices n°6 : Sommes, produits, formule du binôme, factorisation

En l'absence d'autre indication, n désignera un entier naturel quelconque, $n \in \mathbb{N}$.

I. Sommes

Exercice 1. a) Calculer $\sum_{k=1}^n (-1)^k 2^{2k+1}$; $\sum_{k=1}^n (2^{2k+1} + 3^{2k-1})$; $\sum_{k=1}^n (2^{2k+1} \times 3^{2k-1})$.

b) Calculer $\sum_{k=2}^{n+1} \left(\frac{1}{(1-k)^3} + \frac{1}{k^3} \right)$.

c) Montrer que $\sum_{k=1}^n \frac{k}{(k+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!}$

(indication : montrer que $\frac{k}{(k+1)!} = \frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!}$).

Exercice 2. On note ici pour tout entier n , $u_n = \frac{1}{2^n}$. Calculer :

$$\text{a) } \sum_{k=0}^{2n+1} u_k \quad \text{b) } \sum_{k=1}^{2n} u_{2k} \quad \text{c) } \sum_{k=0}^n u_{2n-k} \quad \text{d) } \sum_{k=0}^n u_{k+n} \quad \text{e) } \sum_{k=0}^n (u_k + n)$$

Exercice 3. a) Déterminer deux réels a et b tels que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \frac{1}{(k+1)(k+3)} = \frac{a}{k+1} + \frac{b}{k+3}$$

b) En déduire la valeur de la somme $\sum_{k=0}^n \frac{1}{(k+1)(k+3)}$.

c) Faire de même pour $\sum_{k=0}^n \frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)}$

Exercice 4. Les questions a) et b) sont indépendantes.

a) Simplifier la somme $S_n = \sum_{k=1}^n \ln \left(1 + \frac{1}{k} \right)$

b) Simplifier le produit $P_n = \prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k^2} \right)$

Exercice 5. Soit $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k}$, pour n entier naturel non nul.

Calculer $S_{n+1} - S_n$ et en déduire le sens de variation de la suite (S_n) .

II. Sommes doubles.

Exercice 6. Calculer les sommes doubles suivantes :

$$\sum_{\substack{0 \leq h \leq m \\ 0 \leq k \leq n}} h(k^2 + 1), \quad \sum_{0 \leq h, k \leq n} 2^{k+h}, \quad \sum_{0 \leq h \leq k \leq n} 2^{k+h}, \quad \sum_{0 \leq h \leq k \leq n} \frac{h}{k+1}, \quad \sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n \frac{1}{j},$$

$$\sum_{1 \leq i, j \leq n} \min(i, j), \text{ puis } \sum_{1 \leq i, j \leq n} \max(i, j).$$

III. Formule du binôme et coefficients binomiaux.

Exercice 7. Soit $x \in \mathbb{R}_+$; montrer à l'aide de la formule du binôme que $\forall n \in \mathbb{N}$, $(1+x)^n \geq 1+nx$.

Exercice 8. a) Montrer que $\forall (n, p) \in \mathbb{N}^2, p \leq n, \sum_{k=p}^n \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}$.

b) En déduire les sommes suivantes :

$$\sum_{k=1}^n k, \quad \sum_{k=1}^n k(k+1) \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^n k(k+1)(k+2), \quad \text{puis} \quad \sum_{k=1}^n k^2 \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^n k^3.$$

Exercice 9. a) Rappeler la formule du binôme de Newton.

b) Calculer $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$ et $\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k}$ puis en déduire $\sum_{0 \leq 2k \leq n} \binom{n}{2k}$ et $\sum_{0 \leq 2k+1 \leq n} \binom{n}{2k+1}$.

c) Démontrer que

$$\forall n, m \in \mathbb{N}, \quad \binom{n}{n} + \binom{n+1}{n} + \dots + \binom{n+m}{n} = \sum_{k=0}^m \binom{n+k}{n} = \binom{n+m+1}{n+1}$$

Exercice 10. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Calculer :

$$P = \sum_{0 \leq 2k \leq n} \binom{n}{2k} \quad \left(= \binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \cdots \right)$$

et $I = \sum_{0 \leq 2k+1 \leq n} \binom{n}{2k+1} \quad \left(= \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \cdots \right)$

(indication : calculer $P + I$ et $P - I$, puis résoudre le système obtenu).

Exercice 11. Donner une forme plus simple de :

$$\begin{aligned} 1. \quad C &= \sum_{k=0}^n \cos(kx) \quad \text{et} \quad S = \sum_{k=0}^n \sin(kx) \quad (\text{Calculer } C + iS) \\ 2. \quad C_1 &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos(kx) \quad \text{et} \quad S_1 = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \sin(kx) \\ 3. \quad C_2 &= \sum_{k=0}^n \cos^2(kx) \quad \text{et} \quad S_2 = \sum_{k=0}^n \sin^2(kx) \quad (\text{Calculer } C_2 + S_2 \text{ et } C_2 - S_2) \end{aligned}$$

Exercice 12. Soit $n \in \mathbb{N}$.

- Calculer $P(x) = \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} x^p$
- Calculer $P'(x)$ de deux façons différentes. En déduire $\sum_{p=0}^n p \binom{n}{p}$.
- Calculer $\sum_{p=0}^n \frac{1}{p+1} \binom{n}{p}$ (Penser à une intégration.)
- Retrouver la valeur de la somme $\sum_{p=0}^n p \binom{n}{p}$, en démontrant d'abord que si $1 \leq p \leq n$, on a :

$$p \binom{n}{p} = n \binom{n-1}{p-1}$$

Exercice 13. Soit θ un réel tel que $\sin \theta \neq 0$. On rappelle que $\cotan(\theta) = \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}$.

- Calculer $(i + \cotan \theta)^{2n+1}$ de deux manières différentes.
- En déduire que :

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{2n+1}{2k+1} (\cotan \theta)^{2(n-k)} = \frac{\sin((2n+1)\theta)}{(\sin \theta)^{2n+1}}$$

Exercice 14. Soit n un entier de $\mathbb{N}^*$.

Calculer la somme S définie par :

$$S = \sum_{\substack{p \in \mathbb{N} \\ 0 \leq 2p+1 \leq n}} \left(\frac{-1}{3}\right)^p \binom{n}{2p+1}$$

à l'aide du développement de $\left(1 + i\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^n$

IV. factorisations

Exercice 15. Soit a, b des réels, et n un entier naturel. Factoriser les expressions suivantes :

a) $a^4 - 4a^2b^2 + 4b^4$; $a^3 - 8b^3$; $a^2 + 2a^4 - b^2 - 2b^4$; $a^{2n} - 1$; $a^{2n+1} + 1$.

b) $S_n = 1 - 2x + 4x^2 + \dots + (-1)^n 2^n x^n$ (deux cas à considérer).

c) $A_n = \sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{ka}{n}}$ (deux cas à considérer).

Exercice 16. Développer $(a + b + c)^2$. Montrer que pour tous nombres $a_1, \dots, a_n$:

$$\left(\sum_{k=1}^n a_k\right)^2 = \sum_{k=1}^n a_k^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i a_j .$$

Exercice 17. Etablir de deux façons différentes que pour tout entier n non nul, $10^n - 1$ est divisible par 9.