Lycée Fénelon — Mathématiques
Année 2021/22 — BCPST1

Feuille d'Exercices 7

Suites usuelles

Exercice 1 :

Déterminer l'expression de u_n en fonction de n dans chacun des cas suivants :

a)
$$u_0 = 1, \qquad \forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 3u_n - 1$$

b)
$$u_0 = 1, \quad u_1 = 1, \quad u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$$

c)
$$u_0 = 1, u_1 = \cos\theta, \quad u_{n+2} = 2\cos(\theta) \times u_{n+1} - u_n \qquad (\theta \in \mathbb{R})$$

Exercice 2 :

1) Soit deux suites (u_n) et (v_n) définies par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ v_0 = 1 \end{cases} \quad \text{et pour tout } n \in \mathbb{N} \quad \begin{cases} u_{n+1} = u_n + v_n \\ v_{n+1} = u_n - v_n \end{cases}$$

a) Montrer que (u_n) et (v_n) sont des suites récurrentes linéaires d'ordre 2.

b) En déduire les expressions de u_n et v_n en fonction de n.

2) Soit (w_n) la suite définie par : $w_0 = 1$ $w_1 = 2$ et la relation de récurrence :

$$w_{n+2} = -w_n + 2 \qquad (*)$$

a) Déterminer une suite constante égale à c satisfaisant la relation de récurrence $(*)$.

b) Montrer que la suite $(w_n - c)$ est récurrente linéaire d'ordre 2. En déduire l'expression de w_n en fonction de n.

Exercice 3 On considère deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} = 2u_n - v_n \\ v_{n+1} = u_n + 4v_n \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} u_0 = 2 \\ v_0 = -1 \end{cases}$$

Première méthode.

1. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont récurrentes linéaires d'ordre 2.
2. En déduire les expressions de v_n et de u_n en fonction de n.

Seconde méthode.

1. On considère (p_n) définie par $\forall n \in \mathbb{N}, \quad p_n = u_n + v_n$.
   Montrer que la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique.
   En déduire l'expression de p_n en fonction de n.
2. À l'aide de la question précédente, montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_{n+1} = 3v_n + 3^n$.
3. Montrer que la suite $z_n = \dfrac{v_n}{3^n}$ est arithmétique.
   En déduire l'expression de z_n en fonction de n.
4. Donner finalement l'expression de v_n puis de u_n en fonction de n.

Exercice 4

1. Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite satisfaisant la relation : $\forall n \geqslant 0,\ u_{n+1} = 2u_n + 5^n$.
   Pour expliciter le terme général de cette suite, on pose, pour tout $n \in \mathbb{N},\ \alpha_n = \dfrac{u_n}{5^n}$.
   a) Vérifier que $\forall n \in \mathbb{N},\ \alpha_{n+1} = \dfrac{2}{5}\alpha_n + \dfrac{1}{5}$.
   b) En déduire l'expression de α_n puis celle de u_n en fonction de n et u_0.
2. On considère une suite vérifiant $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = e\sqrt{u_n}$ et $u_0 > 0$.
   a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > 0$.

   On introduit la suite auxiliaire t définie par $t_n = \ln u_n$.
   b) Justifier que la suite t est arithmético-géométrique.
   c) En déduire l'expression de t_n en fonction de n, t_0 puis de u_n en fonction de n, u_0.
   d) En déduire la convergence et la limite de la suite u.