

Exercice 1.

d) (E) $y'' - 4y = \exp(2x)$.

L'équation homogène associée est (H) : $y'' - 4y = 0$ ayant pour équation caractéristique : (EC) : $r^2 - 4 = 0$.

Cette équation scalaire a deux solutions réelles distinctes : $r_1 = 2$ et $r_2 = -2$. Ainsi les solutions de (H) sont toutes les fonctions $y : x \mapsto \lambda e^{2x} + \mu e^{-2x}$, avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. Déterminons une solution particulière de (E). Puisque 2 est solution de (EC) d'ordre de multiplicité 1, on peut chercher une solution particulière sous la forme $y_p(x) = axe^{2x}$; dans ce cas :

$$\begin{aligned} y_p'(x) &= ae^{2x} + 2axe^{2x} \\ y_p''(x) &= 3ae^{2x} + 4axe^{2x} \end{aligned}$$

Ainsi y_p est solution de (E) si et seulement si :

$$\begin{aligned} 3ae^{2x} + 4axe^{2x} - 4axe^{2x} &= e^{2x} \\ \iff (3a - 1)e^{2x} &= 0 \\ \iff a &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

La fonction $y_p : x \mapsto \frac{1}{3}xe^{2x}$ est donc une solution particulière de (E).

L'ensemble des solutions de (E) est donc :

$$\mathcal{S}_E = \left\{ x \mapsto \frac{1}{3}xe^{2x} + \lambda e^{2x} + \mu e^{-2x} \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

e) (E) $y'' + 4y = \sin(2x)$.

L'équation homogène associée est (H) : $y'' + 4y = 0$ ayant pour équation caractéristique : (EC) : $r^2 + 4 = 0$.

Cette équation scalaire a deux solutions complexes conjuguées : $r_1 = 2i$ et $r_2 = -2i$ de partie réelle nulle et de parties imaginaires ± 2 . Ainsi les solutions de (H) sont toutes les fonctions $y : x \mapsto \lambda \cos 2x + \mu \sin 2x$, avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

Déterminons une solution particulière de (E). Puisque $2i$ est solution de (EC) d'ordre de multiplicité 1, on peut chercher une solution particulière sous la forme $y_p(x) = ax \cos 2x + bx \sin 2x$; dans ce cas :

$$\begin{aligned} y_p'(x) &= a \cos 2x + b \sin 2x - 2ax \sin 2x + 2bx \cos 2x \\ y_p''(x) &= -3a \sin 2x + 3b \cos 2x - 4ax \cos 2x - 4ax \sin 2x \end{aligned}$$

Ainsi y_p est solution de (E) si et seulement si :

$$\begin{aligned} -3a \sin 2x + 3b \cos 2x - 4ax \cos 2x - 4ax \sin 2x + 4ax \cos 2x + 4ax \sin 2x &= \sin 2x \\ \iff -3a \sin 2x + 3b \cos 2x &= \sin 2x \end{aligned}$$

Il suffit donc de poser $a = -\frac{1}{3}$ et $b = 0$; la fonction $y_p : x \mapsto -\frac{1}{3}x \cos 2x$ est donc une solution particulière de (E).

L'ensemble des solutions de (E) est donc :

$$\mathcal{S}_E = \left\{ x \mapsto -\frac{1}{3}x \cos 2x + \lambda \cos 2x + \mu \sin 2x \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

f) (E) $y'' + y' = x$.

Première méthode : résolution en tant qu'EDL2.

L'équation homogène associée est (H) : $y'' + y' = 0$ ayant pour équation caractéristique : (EC) : $r^2 + r = 0$.

Cette équation scalaire a deux solutions réelles distinctes : $r_1 = 0$ et $r_2 = -1$. Ainsi les solutions de (H) sont toutes les fonctions $y : x \mapsto \lambda + \mu e^{-x}$, avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

Déterminons une solution particulière de (E). Puisque 0 est solution de (EC) d'ordre de multiplicité 1, on peut chercher une solution particulière sous la forme $y_p(x) = x(ax + b) = ax^2 + bx$; dans ce cas :

$$\begin{aligned} y_p'(x) &= 2ax + b \\ y_p''(x) &= 2a \end{aligned}$$

Ainsi y_p est solution de (E) si et seulement si :

$$\begin{aligned} 2ax + b + 2a &= x \\ \iff 2ax + (b + 2a) &= x \end{aligned}$$

Il suffirait donc que :

$$\begin{cases} 2a = 1 \\ 2a + b = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = -1 \end{cases}$$

ainsi, la fonction $y_p : x \mapsto \frac{1}{2}x^2 - x$ est donc une solution particulière de (E).

L'ensemble des solutions de (E) est donc :

$$\mathcal{S}_E = \left\{ x \mapsto \frac{1}{2}x^2 - x + \lambda + \mu e^{-x} \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

Deuxième méthode : En se ramenant par changement de variable à une EDL1 :

En posant $z = y'$, y satisfait (E) si et seulement si z satisfait (E') : $z' + z = x$.

On résout cette EDL1.

Son équation homogène associée est $z' + z = 0$ qui admet pour solutions toutes les fonctions $z : x \mapsto \lambda e^{-x}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

Déterminons une solution particulière y_p de (E') : par la méthode de variation de la constante on peut chercher y_p sous la forme $\mu(x)e^{-x}$ avec :

$$\mu(x) = \int x e^x dx = x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x$$

obtenu par primitivation par partie en posant $u = x$ et $v' = e^x$ ($u, v \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$). D'où la solution particulière $y_p(x) = x - 1$.

Ainsi toutes les solutions de (E') sont les fonctions de la forme : $z : x \mapsto x - 1 + \mu e^{-x}$ avec $\mu \in \mathbb{R}$.

Les solutions de (E) sont donc toutes les primitives d'une solution de (E') , soit :

$$\mathcal{S}_E = \left\{ x \mapsto \frac{1}{2}x^2 - x + \lambda + \mu e^{-x} \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

Exercice 2. (Traité en TD)

d) $(E) \quad y'' + 3y' + 2y = -1$.

Son équation homogène associée est $(H) : y'' + 3y' + 2y = 0$ ayant pour équation caractéristique : $(EC) : r^2 + 3r + 2 = 0$.

Cette équation scalaire admet deux solutions réelles distinctes : $r_1 = -1$ et $r_2 = -2$ (car leur produit vaut 2 et leur somme -3). Ainsi les solutions de (H) sont toutes les fonctions $y : x \mapsto \lambda e^{-x} + \mu e^{-2x}$, avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

Une solution particulière de (E) est $y_p : x \mapsto -\frac{1}{2}$; l'ensemble des solutions de (E) est donc :

$$\mathcal{S}_E = \left\{ x \mapsto -\frac{1}{2} + \lambda e^{-x} + \mu e^{-2x} \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

e) $(E) \quad y'' - 2y' + 2y = 2$.

Son équation homogène associée est $(H) : y'' - 2y' + 2y = 0$ ayant pour équation caractéristique : $(EC) : r^2 - 2r + 2 = 0$.

Cette équation scalaire a pour discriminant $\Delta = -4 = (2i)^2$; elle admet donc deux solutions complexes conjuguées : $r_1 = 1 + i$ et $r_2 = 1 - i$ de partie réelle 1 et de parties imaginaires ± 1 . Ainsi les solutions de (H) sont toutes les fonctions $y : x \mapsto e^x (\lambda \cos x + \mu \sin x)$, avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

Une solution particulière de (E) est $y_p : x \mapsto 1$; l'ensemble des solutions de (E) est donc :

$$\mathcal{S}_E = \left\{ x \mapsto 1 + e^x (\lambda \cos x + \mu \sin x) \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

f) $(E) \quad y'' + 4y = 3$.

Son équation homogène associée est $(H) : y'' + 4y = 0$ ayant pour équation caractéristique : $(EC) : r^2 + 4 = 0$.

Cette équation scalaire a deux solutions complexes conjuguées : $r_1 = 2i$ et $r_2 = -2i$ de partie réelle nulle et de parties imaginaires ± 2 . Ainsi les solutions de (H) sont toutes les fonctions $y : x \mapsto \lambda \cos 2x + \mu \sin 2x$, avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

Une solution particulière de (E) est $y_p : x \mapsto \frac{3}{4}$; l'ensemble des solutions de (E) est donc :

$$\mathcal{S}_E = \left\{ x \mapsto \frac{3}{4} + \lambda \cos 2x + \mu \sin 2x \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$