Exercice 2.

1. L'ensemble E est réunion disjointe de A et $\overline{A}$ qui sont finis puisque ce sont des parties de E fini. Ainsi :

$$\text{Card } E = \text{Card } A + \text{Card } \overline{A} \implies \text{Card } \overline{A} = \text{Card } E - \text{Card } A$$

2. Retranscrivons le données de l'énoncé en notant E, S, D les ensembles des élèves apprenant l'anglais, l'espagnol et l'italien :

$$\text{Card } E = 28 \quad \text{Card } S = 20 \quad \text{Card } D = 10$$
$$\text{Card } E \cap S = 13 \quad \text{Card } E \cap D = 7 \quad \text{Card } S \cap D = 8$$

3. Puisque chaque élève apprend au moins une langue, un élève n'apprenant que l'allemand est un élève n'apprenant ni l'anglais ni l'espagnol. On cherche donc $\text{Card } \overline{E} \cap \overline{S} = \text{Card } \overline{E \cup S} = 35 - \text{Card } E \cup S$. Or

$$\text{Card } E \cup S = \text{Card } E + \text{Card } S - \text{Card } E \cap S = 28 + 20 - 13 = 35 \implies \text{Card } \overline{E} \cap \overline{S} = 0$$

Aucun élève n'apprend que l'allemand.

4. On cherche le cardinal de $E \cap S \cap D$. Or :

$$\begin{aligned} \text{Card } E \cup S \cup D &= \text{Card } E + \text{Card } S + \text{Card } D \\ &\quad - \text{Card } E \cap S - \text{Card } E \cap D - \text{Card } S \cap D \\ &\quad + \text{Card } E \cap S \cap D \\ 35 &= 28 + 20 + 10 - 13 - 7 - 8 + \text{Card } E \cap S \cap D \\ &\implies \text{Card } E \cap S \cap D = 35 - 30 = 5 \end{aligned}$$

il y a 5 élèves trilingues.

5. Un élève est bilingue s'il apprend 2 langues, mais pas 3. On calcul séparément selon les langues apprises :
bilingues : anglais-espagnol : $\text{Card } E \cap S - \text{Card } E \cap S \cap D = 13 - 5 = 8$.
bilingues : anglais-allemand : $\text{Card } E \cap D - \text{Card } E \cap S \cap D = 7 - 5 = 2$.
bilingues : allemand-espagnol : $\text{Card } S \cap D - \text{Card } E \cap S \cap D = 8 - 5 = 3$.
il y a donc $8 + 2 + 3 = 13$ élèves bilingues.

Exercice 3. Ce corrigé porte sur la classe de 45 élèves de l'année 2019-20. Il s'adapte facilement pour un autre effectif.

1. Il y en a : 365^{45}.
2. Il y en a : $\dfrac{365!}{320!}$.
3. Il y en a : $365^{45} - \dfrac{365!}{320!}$.
4. C'est la probabilité pour qu'une apllication de E dans F soit non injective, soit :

$$\Pi(A) = \frac{365^{45} - \frac{365!}{320!}}{365^{45}} = 1 - \frac{365!}{320! \times 365^{45}} = 1 - \prod_{k=1}^{45} \frac{320 + k}{365}$$

Un calcul approché (calculatrice ou python) donne :

```
P = 1
for k in range(1,45+1):
    P = P * (320+k)/365
print(1-P)
```

qui donne pour résultat : 0.9409758994657749.
La probabilité pour que 2 élèves de BCPST12019-20 soient nés le même jour est supérieure à $0,94$. Vérifiez si c'est le cas... La probabilité en est très importante.

Exercice 5. Un rangement est une application de l'ensemble des paires vers l'ensemble des tiroirs (qui associe à une paire le tiroir où la ranger). En numérotant les paires et les tiroirs c'est donc une application de $[[1, n]]$ dans $[[1, n]]$.

1) Il faut calculer la probabilité pour que l'application rangement soit bijective : il y a $n!$ applications bijectives et n^n applications en tout. Soit une probabilité, chaque rangement étant équiprobable, de :

$$\frac{n!}{n^n}$$

2) Pour qu'il y ait exactement un tiroir vide exactement un autre tiroir doit contenir deux paires et tous les autres une seule.
– Il y a $\binom{n}{1}$ choix pour le tiroir vide.
– Il y a $\binom{n-1}{1}$ choix pour le tiroir contenant deux paires.
– Il y a $\binom{n}{2}$ choix pour les pires dans le même tiroir.
– Il y a $(n-2)!$ choix pour la bijection entre les paires restantes et les tiroirs restants.
Ainsi le nombre de rangements pour lesquels exactement un tiroir est vide est :

$$\binom{n}{1} \times \binom{n-1}{1} \times \binom{n}{2} \times (n-2)! = n(n-1)\frac{n(n-1)}{2}(n-2)! = \frac{n(n-1)}{2} \times n!$$

Par équiprobabilité de chaque rangement, la probabilité qu'exactement un tiroir soit vide est :

$$\frac{n(n-1)n!}{2n^n}$$

Exercice 6.

1. Il y a 7 dominos doubles (autant que d'éléments dans $[[0,6]]$) et $\binom{7}{2}$ dominos simples (autant que de combinaisons de 2 élément sdans un ensemble de cardinal 7). Ainsi, un domino étant soit simple soit double, le nombre total de dominos est :

$$7+\binom{7}{2}=7+\frac{7\times 6}{2}=\boxed{28}$$

2. • Première méthode : en séparant selon qu'il y ait un double ou deux simples.
Premier cas : si l'un des dominos compatibles est double.
Il faut d'abord choisir le double : 7 possibilités.
Sa face et donc compatible avec l'autre domino, qui ne peut pas être double.
Il faut encore choisir la deuxième face du domino simple : soit un nombre dans $[[0,6]]$ différent de la première face : il y a 6 possibilités.
Ainsi dans ce cas il y a $7\times 6=42$ choix possibles.

Deuxième cas : si les deux dominos sont simples.
il faut choisir la face compatible : 7 possibilités.
Puis choisir les deux autres faces de chaque domino. Il y a autant de choix que de combinaisons de 2 éléments dans un ensemble de cardinal 6 ; soit $\binom{6}{2}$.
Ainsi dans ce cas il y a $7\times\binom{6}{2}$ choix possibles.
En tout il y a

$$7\times 6+7\times\binom{6}{2}=7\times 6+7\times\frac{6\times 5}{2}=7\times(6+15)=\boxed{147}.$$

• Deuxième méthode : sans séparer.
Il faut choisir la face compatible (7 possibilités), et les deux autres faces. Elles doivent être différentes mais peuvent être égales à la face compatible (quand il y a un double). Soit $\binom{7}{2}$. Ainsi en tout :

$$\boxed{7\times\binom{7}{2}=7\times\frac{7\times 6}{2}=147}$$

3. il y a 28 dominos dont 7 doubles. Pour choisir 5 dominos il y a en tout $\binom{28}{5}$ possibilités, dont $\binom{21}{5}$ ne comportant aucun double. Ainsi il y a :

$$\boxed{\binom{28}{5}-\binom{21}{5}}$$

choix possibles.

Exercice 7.

1. Il faut choisir les 2 scientifiques parmi 5 : $\binom{5}{2}$ choix possibles, et les 3 littéraires parmi 7 : $\binom{7}{3}$ choix possibles. Puisque pour chaque choix des scientifiques, un choix des littéraires détermine un jury, il faut multiplier ces deux nombres (on choisit les scientifiques ET les littéraires).
Il y a donc $\binom{5}{2}\times\binom{7}{3}=\frac{5\times 4}{2}\times\frac{7\times 6\times 5}{6}=350$
2. Il faut choisir les 2 scientifiques parmi 5 : $\binom{5}{2}$ choix possibles, et les 2 littéraires parmi 6 restants : $\binom{6}{2}$ choix possibles.
Il y a donc $\binom{5}{2}\times\binom{6}{2}=\frac{5\times 4}{2}\times\frac{6\times 5}{2}=150$
3. Le nombre de jury comportant ces deux scientifiques est : $\binom{7}{3}=\frac{7\times 6\times 5}{6}=35$.
Le nombre de jurys n'ayant pas ces deux scientifiques à la fois est donc : 350-35=315.
4. Le nombre de jury comportant les deux littéraires est $\binom{5}{1}\times\binom{5}{2}=5\times\frac{5\times 4}{2}=50$.
Le nombre de jury ne comportant pas les deux littéraires à la fois est donc : $350-50=300$.

Exercice 8.

1. Autant que de permutations de 10 éléments : $\boxed{10!}$.
2. (a) Il faut choisir les 5 positions où placer les rouges (autant que de 5-combinaisons dans un ensemble de cardinal 10), puis les 2 positions où placer les blanches sur les 5 emplacements restants (autant que de 2-combinaisons dans un ensemble de cardinal 5). Puis on place les vertes sur les emplacements restants (1 possibilité). Ainsi en tout il y a :

$$\binom{10}{5}\times\binom{5}{2}$$

façons de les disposer.

(b) Il suffit dans ce cas de choisir l'ordre des 3 couleurs : 3! possibilités.

(c) On choisit l'emplacement où est située la première rouge : ça peut aller de 1 à 6 : 6 possibilités. On choisit ensuite où placer les blanches sur les 5 emplacements restants : $\binom{5}{2}$ possibilités. Puis on dispose les vertes aux emplacement libres (1 possibilité). Il y a donc en tout :

$$6 \times \binom{5}{2}$$

façons de les disposer.

Exercice 9.

1. $\binom{52}{13}$ mains possibles.
2. a) Mains contenant au moins 1 pique : on soustrait au nombre de mains possibles, le nombre de mains contenant 0 piques (puisque $Card\ \overline{A} = Card\ E - Card A$).
   Il y a $\binom{52}{13}$ mains possibles en tout.
   Il y en a $\binom{52-13}{13} = \binom{39}{13}$ ne contenant aucun piques (choisir les 13 cartes parmi le 39 cartes non piques.
   La réponse est donc : $\binom{52}{13} - \binom{39}{13}$.

   b) Mains contenant au plus 1 pique :
   Mains sans pique : $\binom{52-13}{13}$ (Choisir 13 cartes non piques).
   Mains avec 1 pique : $\binom{13}{1} \times \binom{52-13}{12}$ (choisir le pique et les 12 cartes non piques).
   Puisqu'il y a 0 OU 1 pique le nombre de telles mains est :

$$\binom{39}{13} + 13 \times \binom{39}{12}$$

   c) L'as choisi est pique ou non pique ; ce qui change le décompte. On calcul séparément dans les 2 cas :
   Si l'as choisi est pique ; il y a au plus 1 autre pique (non as) :

$$\underbrace{\binom{1}{1}}_{\text{choix de l'as de pique}} \times \left(\underbrace{\binom{36}{12}}_{\substack{\textbf{1 pique en tout.}\\ \text{12 non piques}\\ \text{et non as}}} + \underbrace{\binom{12}{1} \times \binom{36}{11}}_{\substack{\textbf{2 piques en tout}\\ \text{1 pique non as}\\ \text{11 non pique non as}}} \right)$$

   Si l'as choisi est non pique ; il y a au plus 2 autre piques (non as) :

$$\underbrace{\binom{3}{1}}_{\text{choix de l'as non pique}} \times \left(\underbrace{\binom{36}{12}}_{\substack{\textbf{0 pique en tout}\\ \text{12 non piques}\\ \text{et non as}}} + \underbrace{\binom{12}{1} \times \binom{36}{11}}_{\substack{\textbf{1 pique en tout}\\ \text{1 pique non as}\\ \text{11 non pique non as}}} + \underbrace{\binom{12}{2} \times \binom{36}{10}}_{\substack{\textbf{2 piques en tout}\\ \text{2 piques non as}\\ \text{10 non piques non as}}} \right)$$

   Il y en a en tout (on somme) :

$$4 \times \binom{36}{12} + 4 \times \binom{12}{1} \times \binom{36}{11} + 3 \times \binom{12}{2} \times \binom{36}{10}$$

Exercice 10.

1. Autant que de permutations de 5 éléments : $5! = 120$.
2. On choisit une 2-liste sans répétition pour les 2 voyelles (première et dernière) et un ordre pour les 3 lettres restantes. Soit $2 \times 3! = 12$.
3. On choisit une 2-liste sans répétition pour les 2 consonnes (première et dernière) et un ordre pour les 3 lettres restantes. Soit $\dfrac{3!}{(3-2)!} \times 3! = 6 \times 6 = 36$.
4. On choisit la voyelle, la consonne et l'ordre sur les 3 intermédiaires :

$$2 \times 3 \times 3! = 36$$

Pour le mot CONCOURS on procède de la même façon en distinguant les 2 O et les 2 C ; mais chaque mot est alors comptés $2 \times 2 = 4$ fois. On divise alors par 4 :

1. $\dfrac{8!}{4}$.
2. $\dfrac{1}{4} \times \dfrac{3!}{1!} \times 6!$ (car 3 voyelles).
3. $\dfrac{1}{4} \times \dfrac{5!}{3!} \times 6!$ (car 5 consonnes).
4. $\dfrac{1}{4} \times 3 \times 5 \times 6!$.

Exercice 12.

1. Un envoi est déterminé par le choix pour chaque expéditeur d'un des $(n-1)$ destinataires possibles ; soit

$$\boxed{(n-1)^n \text{ possibilités}}$$

2. Il faut choisir les p expéditeurs autres que A vers A ($\binom{n-1}{p}$ possibilités), le choix du destinataire de A ($(n-1)$ possibilités) et pour chacun des $(n-p-1)$ expéditeurs restants le choix du destinataire parmi $(n-2)$ possibilités. Soit :

$$\boxed{\binom{n-1}{p} \times (n-1) \times (n-2)^{n-p-1} \text{ possibilités}}$$

Exercice 13.
Il y a $\binom{n+m}{p}$ parties à p éléments dans $E \cup F$. Pour k variant entre 0 et p il y en a $\binom{n}{k} \times \binom{m}{p-k}$ ayant k élément de E et $p-k$ éléments de F. Ainsi, on obtient la formule de Van der Monde :

$$\binom{n+m}{p} = \sum_{k=0}^{p} \binom{n}{k}\binom{m}{p-k}$$

Exercice 14.
1) Puisque Card $[\![1,p]\!] >$ Card $[\![1,n]\!]$ il n'existe pas d'applications injectives de $[\![1,p]\!]$ dans $[\![1,n]\!]$.
Puisqu'une application strictement croissante est injective, il n'existe pas d'applications strictement croissantes de $[\![1,p]\!]$ dans $[\![1,n]\!]$ lorsque $p > n$.

2) Il y a autant d'applications strictement croissantes de $[\![1,p]\!]$ dans $[\![1,n]\!]$ que de p-combinaisons dans $[\![1,n]\!]$. En effet une application strictement croissante est uniquement déterminée par son image directe, c'est à dire par la partie à p éléments consistant en toutes ses images. Ainsi il y en a $\binom{n}{p}$ qui lorsque $p \leqslant n$ est égal à $\dfrac{n!}{p!(n-p)!}$.

Exercice 15

1. Nombre d'applications surjectives de $[[1,5]]$ dans $[[1,4]]$.
   Puisqu'il y a un élément de plus dans l'espace de départ que dans l'espace d'arrivée, un élément de $[[1,4]]$ aura exactement deux antécédents, quand tous les autres en auront exactement un. L'application est donc définie par les choix :
   – de l'élément de $[[1,4]]$ ayant deux antécédents,
   – de ses deux antécédents dans $[[1,5]]$,
   – d'une bijection des 3 éléments restants de $[[1,5]]$ vers les 3 éléments restants de $[[1,4]]$.
   Il y a donc en tout :
   $$\binom{4}{1} \times \binom{5}{2} \times 3! = 4 \times 10 \times 6 = \boxed{240}$$
   applications surjectives de $[[1,5]]$ dans $[[1,4]]$.
2. Le même raisonnement s'applique :
   une application surjective de $[[1,p+1]]$ dans $[[1,p]]$ est définie par les choix :
   – de l'élément de $[[1,p]]$ ayant deux antécédents,
   – de ses deux antécédents dans $[[1,p+1]]$,
   – d'une bijection des $(p-1)$ éléments restants de $[[1,p+1]]$ vers les $(p-1)$ éléments restants de $[[1,p]]$.
   Il y a donc en tout :
   $$\binom{p}{1} \times \binom{p+1}{2} \times (p-1)! = p \times \frac{p(p+1)}{2} \times (p-1)! = \boxed{\frac{p \times (p+1)!}{2}}$$
   applications surjectives de $[[1,p+1]]$ dans $[[1,p]]$.