Lycée Fénelon **BCPST1**
Année 2021-22 Probabilités

Feuille n° 17 : Espaces Probabilisés finis

Exercice 1 Une urne contient 9 boules numérotées de 1 à 9.
On tire 2 boules. Déterminer la probabilité d'obtenir 2 boules portant des numéros de même parité dans les cas suivants :

1. On tire les 2 boules simultanément.
2. On tire une boule, on ne la remet pas, on tire la 2ᵉ boule.
3. On tire une boule, on la remet avant de tirer la 2ᵉ boule.

Exercice 2 Une urne contient 5 boules blanches et 10 boules noires.

1. On tire au hasard 2 fois une boule de l'urne en remettant la boule après tirage.
   Quelle est la probabilité d'obtenir une boule blanche et une boule noire.
   (a) dans cet ordre ?
   (b) dans un ordre quelconque ?
2. Mêmes questions si les tirages se font sans remise.
3. On tire simultanément 5 boules de l'urne.
   Quelle est la probabilité d'obtenir 2 boules blanches et trois boules noires ?

Exercice 3 Un archer tire sur des cibles situées à 20 m et à 50 m. Il effectue trois tirs en changeant de cible à chaque fois. La probabilité d'atteindre la cible à 20 m (resp. 50 m) est p (resp. q) avec $q < p$. On suppose les tirs indépendants. Il gagne le jeu s'il atteint deux cibles consécutivement. Par quelle cible a-t-il intérêt à commencer ?

Exercice 4 Soit n un entier naturel non nul. On effectue n lancers indépendants d'une pièce pour laquelle la probabilité d'obtenir "face" est p avec $p \in]0, 1[$. On pose $q = 1 - p$.
Quelle est la probabilité qu'au cours de ces n lancers, "face" ne soit jamais suivi de "pile" ?

Exercice 5 Une urne contient b boules blanches et r boules rouges.
On tire n boules en remettant la boule après tirage si elle est rouge et en ne la remettant pas si elle est blanche.
Quelle est la probabilité d'obtenir exactement une boule blanche en n tirages ?

Exercice 6 Le gérant d'un magasin de matériel informatique a acheté un stock de boîtes de CDs ; il constate que 5% des boîtes sont abîmées.

Le gérant estime que :

— 60% des boîtes abîmées contiennent au moins un CD défectueux.

— 98% des boîtes en bon état ne contiennent aucun CD défectueux.

— Les états des diverses boîtes sont indépendants les uns des autres.

Un client achète une des boîtes du lot.
On désigne par A l'événement : "La boîte achetée est abîmée" et par D l'événement : "La boîte achetée contient au moins un CD défectueux".

1. Donner les probabilités $\mathbb{P}(A)$, $\mathbb{P}(\overline{A})$, $\mathbb{P}(D/A)$, $\mathbb{P}(D/\overline{A})$, $\mathbb{P}(\overline{D}/A)$ et $\mathbb{P}(\overline{D}/\overline{A})$.
   Calculer la probabilité de l'événement D.
2. Le client constate qu'un des CDs est défectueux. Quelle est la probabilité qu'il ait acheté une boîte abîmée ?

Exercice 7 Pour se rendre au lycée, un élève a le choix entre quatre itinéraires : A, B, C, D.
Il choisit d'emprunter l'itinéraire A (resp. B, C) avec une probabilité égale à $\frac{1}{3}$ (resp. $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{12}$)
La probabilité d'arriver en retard en empruntant A (resp. B, C) est $\dfrac{1}{20}$ (resp. $\dfrac{1}{10}$, $\dfrac{1}{5}$). En empruntant D, il n'est jamais en retard.

1. Quelle est la probabilité que l'élève choisisse l'itinéraire D ?
2. L'élève arrive en retard. Quelle est la probabilité qu'il ait emprunté l'itinéraire C ?

Exercice 8 $\dfrac{1}{4}$ d'une population a été vaccinée. Parmi les vaccinés, on compte $\dfrac{1}{12}$ de malades.
Parmi les malades, il y a 4 non-vaccinés pour un vacciné.
Quelle est la probabilité pour un non-vacciné de tomber malade ?

Exercice 9 On obtient "face" avec une pièce A avec une probabilité $\dfrac{1}{2}$. Une pièce B donne "face" avec une probabilité $\dfrac{2}{3}$. On choisit une des deux pièces au hasard. On la lance. Si on obtient "face", on conserve la pièce que l'on vient de lancer, sinon on change de pièce. On effectue ainsi une suite de lancers.
Quelle est la probabilité d'obtenir "face" au n^{e} lancer ?

Exercice 10 Une loterie se déroule une fois par semaine. Sur 100 billets, k sont gagnants. On suppose $k \leq 90$. Chaque billet coûte 1 euro. On dispose de 10 euros. 2 stratégies sont possibles :

— A : on achète 10 billets en une seule fois.

— B : on achète 1 billet à la fois pendant 10 semaines.

Quelle est selon vous la meilleure stratégie pour obtenir un billet gagnant ?

(indication : Pour choisir la bonne stratégie, calculer la probabilité d'avoir au moins un billet gagnant dans les deux cas. Il est plus simple de calculer la probabilité de l'événement contraire.)

Exercice 11 (Marche aléatoire, suite récurrente linéaire d'ordre 2) Soit N un entier strictement positif, a un **entier** compris entre 0 et N, et p un réel vérifiant : $0 < p < 1$ et $p \neq \frac{1}{2}$. On note $q = 1 - p$.

Une particule, situé au début du processus au point d'abscisse a se déplace sur un axe aléatoirement par sauts successifs indépendants les uns des autres d'amplitude $(+1)$ avec une probabilité p et (-1) avec une probabilité q. Si x_n est l'abscisse de la particule à l'issue du $n^{\text{ème}}$ saut, alors :

$$x_0 = a \qquad x_{n+1} = \begin{cases} x_n + 1 & \text{avec la probabilité } p \\ x_n - 1 & \text{avec la probabilité } q \end{cases}$$

Le processus s'arrête dès que la particule atteint l'une des extrémités du segment $[0,\ N]$; plus précisemment, on dira qu'il s'arrête en 0 si la particule atteint l'extrémité 0 et qu'il s'arrête en N si la particule atteint l'extrémité N.

1. Soit q_a la probabilité que le processus, issu de a, s'arrête en 0.
   On a en particulier $q_0 = 1$ (la particule étant en 0 dès le début, le processus ne démarre pas, la particule stationne en 0). De même, on a $q_N = 0$ (la particule, issu de N, reste en N, ne démarre donc pas, et le processus ne s'arrêtera donc pas en zéro).
   (a) Montrer que pour tout entier a tel que $1 \leq a \leq N - 1$, on a :
   $$q_a = p\, q_{a+1} + q\, q_{a-1}$$
   (b) En déduire q_a en fonction de a, N, p et q.
2. De même calculer la probabilité que le processus s'arrête en N.
3. Calculer la somme $p_a + q_a$. En déduire la probabilité que le processus ne s'arrête pas, c'est-à-dire que : $1 \leq x_n \leq N - 1$ pour tout $n \geq 0$.
4. Résoudre les questions précédentes dans le cas où $p = \frac{1}{2}$.

Problème. Partie 1 :

On dispose de deux jetons A et B que l'on peut placer dans deux cases C_0 et C_1 et d'un dispositif permettant de tirer au hasard et de manière équiprobable l'une des lettres a, b et c. Au début de l'expérience, les deux jetons sont placés dans C_0. On procède alors à une série de tirages indépendants de l'une des trois lettres a, b ou c.

A la suite du tirage d'une des lettres, on effectue l'opération suivante :
— si la lettre a est tirée, on change le jeton A de case.
— si la lettre b est tirée, on change le jeton B de case.
— si la lettre c est tirée, on ne change pas le placement des jetons.

On appelle *opération* le tirage d'une lettre au hasard et le déplacement éventuel des jetons consécutif à ce tirage. n désigne un entier naturel quelconque.

On note p_n la probabilité pour qu'à l'issue de la n-ième opération, A et B se trouvent tous les deux dans C_0.

On note q_n la probabilité pour qu'à l'issue de la n-ième opération, A se trouve dans C_0 et B dans C_1.

On note r_n la probabilité pour qu'à l'issue de la n-ième opération, A se trouve dans C_1 et B dans C_0.

On note t_n la probabilité pour qu'à l'issue de la n-ième opération, A et B se trouvent tous les deux dans C_1.

On note $A_{0,n}$ l'événement : "le jeton A se trouve dans la case C_0 à l'issue de la n-ième opération".

On note $A_{1,n}$ l'événement : "le jeton A se trouve dans la case C_1 à l'issue de la n-ième opération".

On note $B_{0,n}$ l'événement : "le jeton B se trouve dans la case C_0 à l'issue de la n-ième opération".

On note $B_{1,n}$ l'événement : "le jeton B se trouve dans la case C_1 à l'issue de la n-ième opération".

On a donc $p_n = \mathbb{P}(A_{0,n} \cap B_{0,n})$

1. Exprimer de la même façon q_n, r_n et t_n comme probabilité d'un événement défini à l'aide des événements précédents.
2. Calculer p_n, q_n, r_n et t_n, pour $n = 0$ et $n = 1$.
3. Calculer p_{n+1} en fonction de p_n, q_n, r_n et t_n.
   Calculer de même q_{n+1}, r_{n+1} et t_{n+1} en fonction de p_n, q_n, r_n et t_n.
4. On note $X_n = \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \\ r_n \\ t_n \end{pmatrix}$.
   Déterminer la matrice R de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ telle que $X_{n+1} = R\,X_n$ pour tout n de $\mathbb{N}$.
5. En déduire que $X_n = R^n\,X_0$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

Partie 2 :

On considère les matrices :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad V = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Calculer les matrices U^n et V^n pour tout n de $\mathbb{N}^*$.
2. Montrer que $(U-V)^n = \dfrac{1}{4}\left(3^n - (-1)^n\right)U + (-1)^n V^n$
3. Vérifier que $R = \frac{1}{3}(U-V)$
4. En déduire X_n en fonction de n dans $\mathbb{N}^*$, puis p_n, q_n, r_n et t_n en fonction de n dans $\mathbb{N}^*$.