Lycée Fénelon
Année 2021-22

BCPST1
Développements limités

TD n° 21 : Développements limités, Etude locale de fonctions.

Exercice 1 *Calcul de développements limités :*

1. $\mathrm{DL}_3(\frac{\pi}{4})$ de $f_1 : x \mapsto \dfrac{\cos x - \frac{\sqrt{2}}{2}}{\pi - 4x}$.
2. $\mathrm{DL}_3(0)$ de $f_2 : x \mapsto \ln(x + \sqrt{\cos x})$.
3. $\mathrm{DL}_2(0)$ de $f_3 : x \mapsto \sqrt{1 + \sqrt{1-x}}$.
4. $\mathrm{DL}_2(+\infty)$ de $f_4 : x \mapsto \sqrt[3]{\dfrac{x^2+x+1}{x^2+1}}$.
5. Donner un équivalent en 0 de la fonction $f_5 : x \mapsto \sqrt{1+2x} - \cos x - \sin x$.
6. Grâce à un DL d'ordre convenable, montrer que l'on peut prolonger par continuité en 1 la fonction $f_6 : x \mapsto \dfrac{1 - \sqrt{x^2+2x-2}}{x-1}$.
   Etudier la courbe de f_6 au voisinage du point d'abscisse 1.
7. (a) Donner un $\mathrm{DL}_3(0)$ de arctan(x). En déduire la tangente à sa courbe représentative au point d'abscisse 0, et la position de sa courbe par rapport à la tangente.
   (b) Citer une relation liant arctan(x) et arctan(1/x). En déduire un $\mathrm{DL}_3(+\infty)$ de arctan(x), l'asymptôte en $+\infty$ à la courbe de arctan, et la position par rapport à l'asymptôte.

Exercice 2 Calculer les DL en 0 suivants à l'ordre précisé, puis en déduire l'équation de la tangente au graphe de la fonction au point d'abscisse 0 et leur position relative au voisinage de 0.

1. $f_7(x) = \ln(1 + \cos x)$ (ordre 3).
2. $f_8(x) = \dfrac{1}{e^x + \cos x}$ (ordre 3).
3. $f_9(x) = \dfrac{e^{2x} - e^{-2x}}{(1+x)^2}$ (ordre 2).

Exercice 3 Calculer le DL en $+\infty$ des fonctions suivantes à l'ordre précisé.

1. $f_{10}(x) = \sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}$ à l'ordre 3. En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} x\left(\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}\right)$.
2. $f_{11}(x) = \left(\dfrac{x}{1+x}\right)^x$ à l'ordre 2. En déduire l'équation de la droite asymptote en $+\infty$ au graphe de f_5 et leur position relative au voisinage de $+\infty$?
3. Reprendre les deux questions précédentes en $-\infty$.

Exercice 4 On considère la fonction f définie sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ par : $f(x) = \begin{cases} (1+\sin x)^{\frac{1}{x}} & \text{si } x \neq 0 \\ \lambda & \text{si } x = 0 \end{cases}$
avec λ réel.

1. Déterminer la classe de f sur $\left]-\frac{\pi}{2}, 0\right[$ et sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$.
2. Calculer le développement limité de f à l'ordre 2 en 0.
3. En déduire la valeur qu'il faut donner à λ afin que f soit continue en 0. Pour ce choix de λ, f est-elle dérivable en 0 ?
4. Donner une équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 0 et préciser la position de la courbe par rapport à sa tangente au voisinage de ce point.

Exercice 5 Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \sqrt{x^4 - x^2 + x - 1} - (x+1)\sqrt{x^2+1}$$

1. Montrer que f est bien définie au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$.
2. Montrer que la courbe représentative de f (notée $\mathcal{C}_f$) admet en $+\infty$ une **droite asymptote** oblique : déterminer son équation et sa position par rapport à $\mathcal{C}_f$ à l'aide d'un développement limité en $+\infty$ de la fonction :
$$h(x) = \frac{f(x)}{x}$$
3. Montrer que $\mathcal{C}_f$ admet en $-\infty$ une **courbe asymptote** : déterminer son équation et sa position par rapport à $\mathcal{C}_f$ à l'aide d'un développement limité à l'ordre 3 en $-\infty$ de la fonction :
$$g(x) = \frac{f(x)}{x^2}$$

   Rappel : " Soit f et g deux fonctions définies sur le même ensemble au voisinage de a ($a \in \overline{\mathbb{R}}$). On dit que la courbe représentative de g est asymptote à la courbe représentative de f en a si et seulement si : $\lim\limits_{x \to a} f(x) - g(x) = 0$"