Exercice 3.

1) Si la fonction cos admettait une limite $L \in \overline{\mathbb{R}}$ en $+\infty$, alors puisque la suite $n\pi$ tend vers $+\infty$, d'après le théorème de composition des limites la suite $\cos(n\pi)$ aurait aussi pour limite L. Or $\cos(n\pi) = (-1)^n$ n'a pas de limite. Donc la fonction cos n'a pas de limite en $+\infty$.

Si la fonction sin admettait une limite $L \in \overline{\mathbb{R}}$ en $+\infty$, alors puisque la suite $\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right)$ tend vers $+\infty$, d'après le théorème de composition des limites la suite $\sin\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right)$ aurait aussi pour limite L. Or $\sin\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right) = \cos(n\pi) = (-1)^n$ n'a pas de limite. Donc la fonction sin n'a pas de limite en $+\infty$.

2) Si $f(x) = \cos\frac{1}{x}$ avait une limite en 0, d'après le théorème de composition des limites, on aurait :

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{+\infty} \dfrac{1}{x} = 0 \\ \lim\limits_{0} \cos\dfrac{1}{x} = L \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim_{+\infty} \cos\left(\frac{1}{1/x}\right) = L$$

Or $\cos\left(\dfrac{1}{1/x}\right) = \cos x$ n'admet pas de limite en $+\infty$ comme vu en 1). Ainsi $f(x)$ n'admet pas de limite en 0.

Exercice 4*. Soit f une fonction périodique de période $T > 0$. Supposons que f admette une limite finie $L \in \mathbb{R}$ en $+\infty$.
Par définition, pour tout $\varepsilon > 0$. Il existe $A_\varepsilon > 0$ tel que $\forall x \in \mathscr{D}_f,\ x \geqslant A_\varepsilon \implies |L - f(x)| \leqslant \varepsilon$.
Soit $x \in \mathscr{D}_f$ et soit $\varepsilon > 0$:
– Si $x \geqslant A_\varepsilon$ alors $|L - f(x)| \leqslant \varepsilon$.
– Si $x < A_\varepsilon$. Soit $k = \left\lfloor \dfrac{A_\varepsilon - x}{T} \right\rfloor$. Alors :

$$\begin{aligned} & \frac{A_\varepsilon - x}{T} - 1 < k \leqslant \frac{A_\varepsilon - x}{T} \\ \Longrightarrow\ & \frac{A_\varepsilon - x}{T} < k + 1 \leqslant \frac{A_\varepsilon - x}{T} + 1 \\ \Longrightarrow\ & A_\varepsilon - x < (k+1)T \leqslant A_\varepsilon - x + T \\ \Longrightarrow\ & \underline{A_\varepsilon < x + (k+1)T} \leqslant A_\varepsilon + T \end{aligned}$$

Or $(k+1) \in \mathbb{Z}$ et puisque f est T-périodique et $x \in \mathscr{D}_f$, on a $x + (k+1)T \in \mathscr{D}_f$ et $f(x) = f(x + (k+1)T)$, soit, puisque $x + (k+1)T > A_\varepsilon$:

$$|L - f(x)| = |L - f(x + (k+1)T)| \leqslant \varepsilon$$

Ainsi, pour tout $\varepsilon > 0$, $|L - f(x)| \leqslant \varepsilon$. La seule possibilité est alors $|L - f(x)| = 0$, c'est-à-dire $f(x) = L$.
Puisque x était supposé quelconque, on obtient donc que $\forall x \in \mathscr{D}_f,\ f(x) = L$: la fonction f est constante égale à L.

Exercice 5.

1) $\lim\limits_{0} \dfrac{2\sin 3x}{2x - 3\sin 2x}$:
On a une indéterminée $\frac{0}{0}$.

$$\frac{2\sin 3x}{2x - 3\sin 2x} = \frac{6x\frac{\sin 3x}{3x}}{2x\left(1 - 3\frac{\sin 2x}{2x}\right)} = \frac{3\frac{\sin 3x}{3x}}{1 - 3\frac{\sin 2x}{2x}}$$

D'après le théorème de composition des limites avec la limite usuelle $\lim\limits_{0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$, et par somme, produit et quotient des limites :

$$\boxed{\lim_{0} \frac{2\sin 3x}{2x - 3\sin 2x} = -\frac{3}{2}}$$

2) $\lim\limits_{0} \sin x \ln(\tan x)$:
L'expression n'est définie que pour $x > 0$. On a une indéterminée $0 \times (-\infty)$.
Puisque $\lim_0 \sin x = \lim_0 \tan x = 0$ on applique la croissance comparée $\lim_{0^+} X \ln X = 0^-$:

$$\sin x \ln(\tan x) = \frac{\sin x}{\tan x} \tan x \ln(\tan x) = \cos x \times \tan x \ln(\tan x)$$

Par croissance comparée, puisque $\lim_{0^+} \tan x = 0^+$, d'après le théorème de composition des limites : $\lim_{0^+} \tan x \ln(\tan x) = 0^-$. d'autre par $\lim_0 \cos x = 1$. Ainsi, par produit des limites :

$$\boxed{\lim_{0} \sin x \ln(\tan x) = 0^-}$$

3) $\lim\limits_{1} \ln(1-x)\cos\left(\dfrac{\pi}{2}x\right)$.
L'expression n'est définie que pour $x < 1$. On a une indéterminée $(-\infty) \times 0$. On applique la croissance comparée $\lim_{0^+} X \ln X = 0^-$:

$$\ln(1-x)\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) = (1-x)\ln(1-x)\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{1-x}$$

On s'est donc ramené au calcul de la limite en 1^- de $\dfrac{\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{1-x}$ qui est une indéterminée $\dfrac{0}{0}$. Pour la lever on se ramène à une limite en 0 en posant : $h = 1-x \underset{x\to 1^-}{\longrightarrow} 0^+$:

$$\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{1-x} = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}(1-h)\right)}{h} = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{h\pi}{2}\right)}{h} = \frac{\sin\left(\frac{h\pi}{2}\right)}{h} = \frac{\pi}{2}\times\frac{\sin\left(\frac{h\pi}{2}\right)}{\frac{h\pi}{2}}$$

En appliquant le théorème de composition des limites avec la limite usuelle $\lim_0 \dfrac{\sin h}{h} = 1$, on obtient par produit des limites : $\lim_1 \dfrac{\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{1-x} = \dfrac{\pi}{2}$, et donc :

$$\boxed{\lim_{1^-} \ln(1-x)\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) = 0^-}$$

4) $\displaystyle\lim_0 \frac{e^{\sqrt{1+\sin x}}-e}{\tan x}$.

On a une indéterminée $\dfrac{0}{0}$. On utilise les équivalents ; au numérateur :

$$\begin{aligned} e^{\sqrt{1+\sin x}} - e &= e\times\left(e^{\sqrt{1+\sin x}-1}-1\right) \\ &\underset{0}{\sim} e\times\left(\sqrt{1+\sin x}-1\right) \end{aligned}$$

par substitution dans l'équivalent $e^u - 1 \underset{0}{\sim} u$ avec $u = \sqrt{1+\sin x}-1 \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$.

Puis, par substitution dans l'équivalent $\sqrt{1+u}-1 \underset{0}{\sim} \dfrac{u}{2}$, avec $u = \sin x \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$:

$$\begin{aligned} e^{\sqrt{1+\sin x}} - e &\underset{0}{\sim} e\times\left(\sqrt{1+\sin x}-1\right) \\ &\underset{0}{\sim} e\times\frac{\sin x}{2} \\ &\underset{0}{\sim} \frac{e\times x}{2} \end{aligned}$$

On obtient donc par quotient d'équivalents :

$$\frac{e^{\sqrt{1+\sin x}}-e}{\tan x} \underset{0}{\sim} \frac{e\times x}{2\tan x} \underset{0}{\sim} \frac{e\times x}{2x} \underset{0}{\sim} \frac{e}{2}$$

Finalement :

$$\boxed{\lim_0 \frac{e^{\sqrt{1+\sin x}}-e}{\tan x} = \frac{e}{2}}$$

5) $\displaystyle\lim_{+\infty} \frac{\ln(1+x^\alpha)}{\ln(x)}$.

$$\frac{\ln(1+x^\alpha)}{\ln(x)} = \frac{\ln(x^\alpha(1+x^{-\alpha})}{\ln(x)} = \frac{\ln(x^\alpha)+\ln(1+x^{-\alpha}))}{\ln(x)} = \alpha + \frac{\ln(1+x^{-\alpha}))}{\ln(x)} \underset{+\infty}{\longrightarrow} \boxed{\alpha}$$

6) $\displaystyle\lim_0 \frac{\ln(\sin(x))}{\ln(x)}$.

On prend $x \in]0;\frac{\pi}{2}[$.

$$\frac{\ln(\sin(x))}{\ln(x)} = \frac{\ln\left(x\frac{\sin(x)}{x}\right)}{\ln(x)} = \frac{\ln(x)}{\ln(x)} + \frac{\ln\frac{\sin(x)}{x}}{\ln(x)} \underset{0}{\longrightarrow} \boxed{1}$$

7) $\displaystyle\lim_{+\infty} \left(\frac{\ln(1+x)}{\ln(x)}\right)^{x\ln x}$.

L'expression est définie sur $]1,+\infty[$. On passe à l'écriture en exponentielle :

$$\left(\frac{\ln(1+x)}{\ln(x)}\right)^{x\ln x} = \exp\left(x\ln(x)\times\ln\left(\frac{\ln(1+x)}{\ln(x)}\right)\right)$$

On déjà a une indéterminée $\frac{+\infty}{+\infty}$ sous le dernier logarithme. Or :

$$\frac{\ln(1+x)}{\ln x} = \frac{\ln x + \ln(1+1/x)}{\ln(x)} = 1 + \frac{\ln(1+1/x)}{\ln(x)} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1$$

donc d'après le théorème de composition des limites $\lim\limits_{+\infty} \ln\left(\dfrac{\ln(1+x)}{\ln x}\right) = 0$, et on a alors sous l'exponentielle une indéterminée $0\times(+\infty)$. pour la lever, on utilise l'équivalent $\ln u \underset{1}{\sim} (u-1)$ (en substituant u par $\dfrac{\ln(1+x)}{\ln x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1$:

$$\begin{aligned} x\ln(x)\ln\left(\frac{\ln(1+x)}{\ln x}\right) &\underset{+\infty}{\sim} x\ln(x)\left(\frac{\ln(1+x)}{\ln x}-1\right)\\ &\underset{+\infty}{\sim} x\ln(x)\frac{\ln(1+x)-\ln x}{\ln x}\\ &\underset{+\infty}{\sim} x\ln\left(\frac{1+x}{x}\right)\\ &\underset{+\infty}{\sim} x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\\ &\underset{+\infty}{\sim} x\frac{1}{x}\\ &\underset{+\infty}{\sim} 1 \end{aligned}$$

en appliquant l'équivalent $\ln(1+u) \underset{0}{\sim} u$ avec la substitution $u = \dfrac{1}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

On obtient finalement (par composition des limites) :

$$\boxed{\lim_{+\infty}\left(\frac{\ln(1+x)}{\ln(x)}\right)^{x\ln x} = e}$$

Exercice 6.

1) $f_1(x) = \ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right)$. La fonction f_1 est continue sur son ensemble de définition comme composée de fonctions continues : une fraction rationnelle suivie de ln.

Déterminons $\mathscr{D}_{f_1}$: $f_1(x)$ est définie lorsque $\dfrac{x+1}{x}$ est défini et >0, soit (avec un tableau de signe) pour $x \in]-\infty;-1[\cup]0;+\infty[$.

f_1 est continue sur $\mathscr{D}_{f_1} =]-\infty;-1[\cup]0;+\infty[$.

2) $f_2(x) = \ln(x^2-5x+6)$. La fonction f_2 est continue sur son domaine de définition comme composée de fonctions continues : un polynôme suivi de ln.

Déterminons $\mathscr{D}_{f_2}$: $f_2(x)$ est définie lorsque $x^2-5x+6>0$; il suffit donc d'étudier le signe du trinôme ; x^2-5x+6 admet deux racines réelles distinctes, 2 et 3, et donc : f_2 est continue sur $\mathscr{D}_{f_2} =]-\infty;2[\cup]3;+\infty[$.

3) $f_3(x) = \ln(2\sin x+1)$. La fonction f_3 est continue sur son ensemble de définition comme composée de fonctions continues : ln et une combinaison linéaire de fonctions continues, une fonction polynomiale et une fonction circulaire.

Déterminons $\mathscr{D}_{f_3}$: $f_3(x)$ est définie lorsque $2\sin x+1>0$, c'est à dire lorsque $\sin x > -\dfrac{1}{2}$:

$$\sin x > -\frac{1}{2} \iff \sin x > \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$$

sur $\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{3\pi}{2}\right]$:

$$\sin x > -\frac{1}{2} \iff x \in \left]-\frac{\pi}{6};\frac{7\pi}{6}\right[$$

et donc sur $\mathbb{R}$, par 2π-périodicité de sin :

$$\sin x > -\frac{1}{2} \iff x \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left]-\frac{\pi}{6}+2k\pi;\frac{7\pi}{6}+2k\pi\right[$$

Ainsi f_3 est continue sur :

$$\mathscr{D}_{f_3} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left]-\frac{\pi}{6}+2k\pi;\frac{7\pi}{6}+2k\pi\right[$$

4) $f_4(x) = \sqrt{\ln x}$. La fonction f_4 est continue sur son ensemble de définition comme composée des fonctions continues ln et racine carrée.

Déterminons $\mathscr{D}_{f_4}$: $f_4(x)$ est définie lorsque $\ln x$ est définie et $\geqslant 0$, c'est à dire sur $\mathscr{D}_{f_4} = [1;+\infty[$.

Ainsi f_4 est continue sur $\mathscr{D}_{f_4} = [1;+\infty[$.

5) $f_5(x) = \sqrt{\cos x+\sin x}$.

La fonction f_5 est continue sur son ensemble de définition, comme composée de fonctions continues : racine carrée et la somme de deux fonctions circulaires.

Déterminons $\mathscr{D}_{f_5}$: $f_5(x)$ est définie lorsque $\cos x+\sin x \geq 0$.

$$\begin{aligned} \cos x+\sin x &= \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x+\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x\right)\\ &= \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}\cos x+\sin\frac{\pi}{4}\sin x\right)\\ &= \sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right) \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\cos x+\sin x \geqslant 0 \iff \cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right) \geqslant 0$$

si $x \in \left[-\dfrac{\pi}{2} ; \dfrac{3\pi}{2}\right]$:

$$\cos x + \sin x \geqslant 0 \iff -\frac{\pi}{2} \leqslant x - \frac{\pi}{4} \leqslant \frac{\pi}{2} \iff -\frac{\pi}{4} \leqslant x \leqslant \frac{3\pi}{4}$$

et donc sur $\mathbb{R}$, par 2π-périodicité de cos :

$$\cos x + \sin x \geqslant 0 \iff x \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left]-\frac{\pi}{4} + 2k\pi ; \frac{3\pi}{4} + 2k\pi\right[$$

Ainsi : f_5 est continue sur :

$$\mathscr{D}_{f_5} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left]-\frac{\pi}{4} + 2k\pi ; \frac{3\pi}{4} + 2k\pi\right[$$

Exercice 11.

1) Étudions le domaine de définition de

$$f(x) = \exp\left((x-1)\ln\frac{x}{x-1}\right) - \exp\left((x+1)\ln\frac{x+1}{x}\right)$$

Soit $x \in \mathbb{R}$; $f(x)$ est définie ssi

$$\frac{x}{x-1} > 0 \quad \text{et} \quad \frac{x+1}{x} > 0$$

On fait un tableau de signe :

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
x		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$\dfrac{x}{x-1}$		$+$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	
$\dfrac{x+1}{x}$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$		$+$	

donc $f(x)$ est défini ssi :

$$x \in]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[\quad \text{et} \quad x \in]-\infty, -1[\cup]0, +\infty[$$

Ainsi :

$$\mathscr{D}_f = (]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[) \cap (]-\infty, -1[\cup]0, +\infty[) = \boxed{]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[}$$

2) Montrons que f est impaire. Son domaine de définition est symétrique par rapport à 0 :

$$x \in \mathscr{D}_f \iff (x > 1 \text{ ou } x < -1) \iff (-x < -1 \text{ ou } -x > 1) \iff -x \in \mathscr{D}_f$$

De plus :

$$\begin{aligned}
f(-x) &= \exp\left((-x-1)\ln\frac{-x}{-x-1}\right) - \exp\left((-x+1)\ln\frac{-x+1}{-x}\right) \\
&= \exp\left((-x-1)\ln\frac{x}{x+1}\right) - \exp\left((-x+1)\ln\frac{x-1}{x}\right) \\
&= \exp\left(-(-x-1)\ln\frac{x+1}{x}\right) - \exp\left(-(-x+1)\ln\frac{x}{x-1}\right) \\
&= \exp\left((x+1)\ln\frac{x+1}{x}\right) - \exp\left((x-1)\ln\frac{x}{x-1}\right) \\
&= -f(x)
\end{aligned}$$

3) Puisque f est impaire, il suffit d'étudier sa limite en 1^+. On obtiendra alors sa limite en $(-1)^-$ en prenant l'opposé.

On a une indéterminée sous la première exponentielle, de type $0 \times (+\infty)$. Pour la lever :

$$(x-1)\ln\frac{x}{x-1} = \underbrace{(x-1)\ln x}_{\underset{x\to 1^+}{\longrightarrow} 0^+} - \underbrace{(x-1)\ln(x-1)}_{\underset{x\to 1^+}{\longrightarrow} 0^-} \underset{x\to 1^+}{\longrightarrow} 0^+$$

par croissance comparée ($\lim\limits_{0^+} X\ln X = 0^-$).

Ainsi :

$$\lim_{1^+} f(x) = 1 - e^{2\ln 2} = -3 \quad \text{et} \quad \lim_{(-1)^-} f(x) = +3$$

Ainsi f se prolonge par continuité en (-1) et 1 en posant :

$$f(1) = -3 \quad \text{et} \quad f(-1) = 3$$

4) Puisque f est impaire, il suffit d'étudier sa limite en $+\infty$. On obtiendra alors sa limite en $-\infty$ en prenant l'opposé.

On a une indéterminée $(+\infty) \times 0$ sous chacune des deux exponentielles. On les lève en utilisant la limite usuelle $x \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1$, ou ce qui revient au même, l'équivalent usuel $\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{x}$ (déduit par substitution de $\ln(1+u) \underset{0}{\sim} u$).

$$(x-1)\ln\frac{x}{x-1} = (x-1)\ln\left(1+\frac{1}{x-1}\right) \underset{+\infty}{\sim} (x-1) \times \frac{1}{x-1} \underset{+\infty}{\sim} 1$$
$$(x+1)\ln\frac{x+1}{x} = (x+1)\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) \underset{+\infty}{\sim} (x+1) \times \frac{1}{x} \underset{+\infty}{\sim} 1$$

Ainsi :

$$\lim_{+\infty} f(x) = \lim_{-\infty} f(x) = 0$$

Exercice 14. Soit f définie sur $\mathbb{R}$ vérifiant :

$$\begin{cases} f \text{ est continue en } 0 \text{ et } 1 \\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x^2) = f(x) \end{cases}$$

1) Montrons que f est paire ; soit $x \in \mathbb{R}$:

$$f(-x) = f((-x)^2) = f(x^2) = f(x)$$

Ainsi f est paire.

2) Soit $x > 0$.

(a) Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N},\ f\left(x^{\frac{1}{2^n}}\right) = f(x)$.

(I). Pour $n = 0$: $f\left(x^{\frac{1}{2^n}}\right) = f(x^1) = f(x)$. Donc la propriété est vraie au rang $n = 0$.

(H). Supposons la propriété vraie au rang n : $f\left(x^{\frac{1}{2^n}}\right) = f(x)$.

$$f\left(x^{\frac{1}{2^{n+1}}}\right) = f\left(\left[x^{\frac{1}{2^{n+1}}}\right]^2\right) = f\left(x^{\frac{2}{2^{n+1}}}\right) = f\left(x^{\frac{1}{2^n}}\right) \underset{(HR)}{=} f(x)$$

La propriété reste dpnc vraie au rang $(n+1)$. Ceci conclut la récurrence.

(b) Soit la suite $u_n = x^{\frac{1}{2^n}} = \exp\left(\frac{1}{2^n}\ln x\right)$. Puisque $\lim \frac{1}{2^n} = 0$, $\lim u_n = 1$.

(c) Puisque $\lim x^{\frac{1}{2^n}} = 1$ et que f est continue en 1 :

$$\lim f\left(x^{\frac{1}{2^n}}\right) = f(1)$$

Puisque $\forall \nu \in \mathbb{N},\ f\left(x^{\frac{1}{2^n}}\right) = f(x)$, on en déduit par passage à la limite : $f(x) = f(1)$.
Ainsi f est constante sur $\mathbb{R}_+^*$.

3) Puisque f est paire et constante sur $\mathbb{R}_+^*$, f est constante aussi sur $\mathbb{R}_-^*$ égale à $f(1)$ et donc f est constante $\mathbb{R}^*$.
Mais puisque f est continue en 0, $f(0) = \lim_{x\to0} f(x) = f(1)$. Ainsi f est constante sur $\mathbb{R}$.