Partie 1

Exercice 3.
1)

```
>>> {1-3} * 15
```

```
TypeError
...
----> 1 {1-3} * 15

TypeError:
unsupported operand type(s) for *: 'set' and 'int'

>>> [1-3] * 15
[-2, -2, -2, -2, -2, -2, -2, -2, -2, -2, -2, -2, -2, -2,
 -2]
```

Avec des accolades : provoque une erreur.
Avec des crochets : provoque un résultat inattendu.
Dans les expressions numériques, on ne peut utiliser que les parenthèses !

Exercice 4.

```
>>> 2/3
0.6666666666666666

>>> 2*3**(-1)
0.6666666666666666
```

Exercice 5.

```
>>> 0.5
0.5

>>> .5
0.5

>>> 5e-1
0.5
```

Exercice 6.

```
>>> 2**.5
1.4142135623730951

>>> (2**.5)**2
2.0000000000000004
```

On n'obtient pas exactement 2. En effet la valeur retournée par l'expression `2**.5` n'est qu'une valeur approchée de $\sqrt{2}$.

Exercice 7. a)

```
>> ((1+5**.5)/2) **2
>> 2.618033988749895

>> ((1+5**.5)/2) +1
>> 2.618033988749895
```

On obtient le même nombre.

b) Explication :

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{1+2\sqrt{5}+5}{4} = \frac{6+2\sqrt{5}}{4} = \frac{3+\sqrt{5}}{2} = 1 + \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

c) Tous les nombres a vérifiant $a^2 = a+1$ sont les racines du trinôme $x^2 - x - 1$. Déterminons ces racines :

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \times (-1) \times 1 = 1 + 4 = 5; a_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}; a_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Il y a exactement deux nombres dont le carré est égale au nombre augmenté de 1 : $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Celui des deux qui est positif est appelé le *nombre d'or*.

Exercice 8.

Opérateur	**Opération**
`//`	Quotient dans la division euclidienne
`%`	Reste dans la division euclidienne

On rappelle la **division euclidienne :**
Pour tous entiers $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{Z}^*$, il existe un unique couple d'entiers $q \in \mathbb{Z}$, $r \in \mathbb{N}$ tels que :

$$\begin{cases} a = q \times b + r \\ 0 \leqslant r < |b| \end{cases}$$

Exercice 9.
On applique l'algorithme d'Euclide :

```
>>> 918 % 221
34

>>> 221%34
17

>>> 34%17
0
```

Ainsi $PGCD(918, 221) = 17$.

Exercice 10.
Chiffre des centaines d'un entier `n` :

```
>>> (n//100) % 10        # ou (n%1000)//100
```

Chiffre des milliers d'un entier `n` :

```
>>> (n//1000) % 10       # ou (n%10000)//1000
```

Chiffre des dizaines de milliers d'un entier `n` :

```
>>> (n//10000) % 10      # ou (n%100000)//10000
```

Partie 2

Exercice 11.
1)

```
>>> from math import exp, log, floor, pi

>>> floor(exp(pi) * log(1/2))
-17
```

2) On a par croissance de la fonction ln :

$$\begin{aligned} 2^n \leqslant 10^6 &\iff \exp(n \ln 2) \leqslant 10^6 \\ &\iff n \ln 2 \leqslant \ln(10^6) \\ &\iff n \leqslant 6 \times \frac{\ln 10}{\ln 2} = 6 \times \log_2(10) \end{aligned}$$

Or, par définition de la partie entière :

$$\lfloor 6 \times \log_2(10) \rfloor \leqslant 6 \times \log_2(10) < \lfloor 6 \times \log_2(10) \rfloor + 1$$

Ainsi le plus grand entier n vérifiant $2^n \leqslant 10^6$ est :

$$\boxed{n = \lfloor 6 \times \log_2(10) \rfloor}$$

D'où l'obtention :

```
>>> from math import log2

>>> floor(6 * log2(10))
19
```

Vérification :

```
>>> 2**19
524288

>>> 2**20
1048576
```

concluante !

Exercice 12.
1) En déclarant `a = 1`, puis en répétant 5 fois l'instruction `a = a+2`, on obtient `11`.
En la répétant plutôt 100 fois, on obtiendrait `201`. En effet la suite des valeurs prises par la variable `a` est arithmétique, de premier terme 1 et de raison 2, donc après n itérations, `a` vaut $1 + 2n$.

2) En déclarant `a = 1`, puis en répétant 5 fois l'instruction `a = a/2`, on obtient `0.03125` qui est égal à 2^{-5}.
En la répétant plutôt 100 fois, on obtiendrait 2^{-100}, soit (valeur approchée) `7.888609052210118e-31` (calcul effectué sous python). En effet la suite des valeurs prises par la variable `a` est géométrique, de premier terme 1 et de raison 1/2, donc après n itérations, `a` vaut 2^{-n}.

3) En déclarant `a = 1`, puis en répétant 5 fois l'instruction `a = 2*a+1`, on obtient `63` qui est égal à $2^6 - 1$.
En la répétant plutôt 100 fois, on obtiendrait $2^{100} - 1$, soit `1267650600228229401496703205375` (calcul effectué sous python). En effet la suite des valeurs prises par la variable `a` est la somme des $(n+1)$ premiers termes de la suite géométrique de premier terme 1 et de raison 2, donc après n itérations, `a` vaut $\frac{1-2^{n+1}}{1-2} = 2^{n+1} - 1$.

Exercice 13. Il suffit d'utiliser les instructions suivantes :
1) `a += 2`
2) `a /= 2`

3) `a *= 2 ; a += 1`

Exercice 14.
1) On obtient une valeur approchée de $\sqrt{2}$ (algorithme de Babylone ; expliqué en TD). Après 5 itérations, les 15 décimales après la virgule sont toutes correctes.

Exercice 15. On peut utiliser une troisième variable auxiliaire pour mémoriser la valeur d'une des 2 variable avant qu'elle ne soit écrasée par la valeur de l'autre variable.

```
>>> a = 1 ; b = 2
>>> t = a ; a = b ; b = t
>>> a
2
>>> b
1
```

Exercice 16. Pour `a` et `b` deux variables à valeurs numériques, cette suite d'instruction :

```
>>> a = a+b ; b = a-b ; a = a-b
```

échange les valeurs des variables `a` et `b`.
En effet : Etat de la mémoire durant l'exécution :

`a, b = 1, 2`

a	Valeur initiale α (=1)
b	Valeur initiale β (=2)

`a = a+b`

a	$\alpha+\beta$ (=3)
b	β (=2)

`b = a-b`

a	$\alpha+\beta$ (=3)
b	$(\alpha+\beta)-\beta=\alpha$ (=1)

`a = a-b`

a	β (=2)
b	α (=1)

Ces instructions ont permis l'échange des valeurs numériques contenues dans les variables `a` et `b`. Leur effet sera le même dès que `a` et `b` ont des valeurs numériques.

Exercice 17.
1) Le mieux est d'utiliser la double affectation :

```
>>> u, v = v, u+v
```

2) Puisque F_n est le nombre de couples au début du n-ième mois (ou encore après $(n-1)$ mois), pour obtenir le nombre de couples après 5 mois, ou 1 an, il faut calculer F_6 et F_13, en répétant l'instruction ci-dessus, respectivement 5 fois et 12 fois, puis en affichant la valeur de `v`. On obtient, respectivement : 8 et 233 couples.

3) Il suffit de saisir :

```
>>> n=6 ; (((1+5**0.5)/2)**n-((1-5**0.5)/2)**n)/5**0.5
8.000000000000002

>>> n=13 ; (((1+5**0.5)/2)**n-((1-5**0.5)/2)**n)/5**0.5
233.00000000000006
```

4) Procédons par récurrence à deux pas.

$$\mathscr{P}(n) : F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$$

Initialisation. Pour $n=0$:

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^0 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^0\right) = \frac{1}{\sqrt{5}}\times 0 = 0 = F_0 \implies \mathscr{P}(0)$$

Pour $n=1$:

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^1 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^1\right) = \frac{1}{\sqrt{5}}\times \sqrt{5} = 1 = F_1 \implies \mathscr{P}(1)$$

Hérédité. Supposons, pour $n \geqslant 0$ fixé, $\mathscr{P}(n)$ et $\mathscr{P}(n+1)$. Montrons $\mathscr{P}(n+2)$.

$$\begin{aligned}
F_{n+2} &= F_n + F_{n+1} \\
&\underset{\text{(HR)}}{=} \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right) + \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \times \left(1+\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \times \left(1+\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \times \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right) - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \times \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2}\right)
\end{aligned}$$

Puisque :

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 &= \frac{1+2\sqrt{5}+5}{4} = \frac{3+\sqrt{5}}{2} \\
\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 &= \frac{1-2\sqrt{5}+5}{4} = \frac{3-\sqrt{5}}{2}
\end{aligned}$$

Ainsi $\mathscr{P}(n+2)$ est vrai.
D'après le principe de récurrence, la proposition $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout entier n.

$\square$