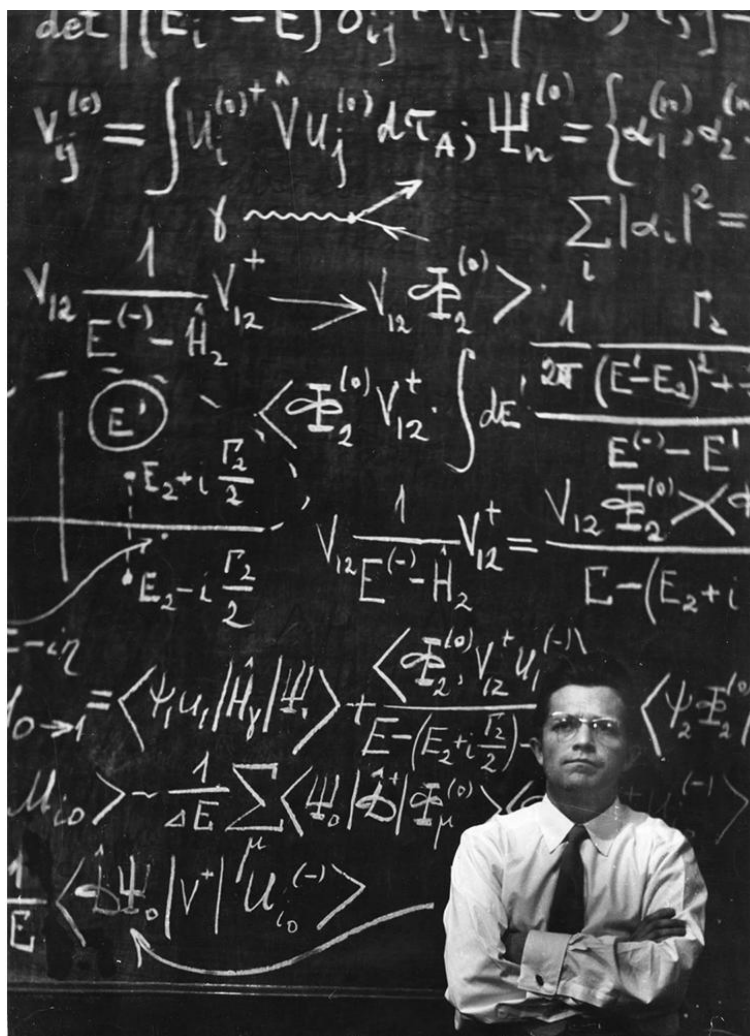


Cahier de calcul

— réponses et corrigés —



Duel, Vsevolod TARASEVITCH (1960)

Photographie du physicien V. V. BALACHOV devant son tableau.

Ce cahier de calcul a été écrit collectivement.

Coordination

Colas BARDAVID

Équipe des participants

Vincent BAYLE, Romain BASSON, Olivier BERTRAND, Ménard BOURGADE, Julien BUREAUX, Alain CAMANES, Mathieu CHARLOT, Mathilde COLIN DE VERDIÈRE, Keven COMMAULT, Miguel CONCY, Rémy EUPHERTE, Hélène GROS, Audrey HECHNER, Florian HECHNER, Marie HÉZARD, Nicolas LAILLET, Valérie LE BLANC, Thierry LIMOGES, Quang-Thai NGO, Xavier PELLEGRIN, Fabien PELLEGRINI, Jean-Louis POURTIER, Valérie ROBERT, Jean-Pierre TÉCOURT, Guillaume TOMASINI, Marc TENTI

Le pictogramme 🕒 de l'horloge a été créé par Ralf SCHMITZER (The Noun Project).

La photographie de la couverture (*Duel*, Vsevolod Tarasevitch) est propriété du Centre de photographie Les Frères Lumière (Moscou).

Le contenu a été adapté à la filière BCPST par Jean-Philippe Préaux.

Sommaire

1. Fractions.....	1
2. Puissances.....	4
3. Calcul littéral.....	5
4. Racines carrées.....	7
5. Expressions algébriques.....	9
6. Équations du second degré.....	12
7. Exponentielle et Logarithme.....	14
8. Trigonométrie.....	16
9. Dérivation.....	19
10. Primitives.....	22
11. Calcul d'intégrales.....	25
12. Intégration par parties.....	29
13. Changements de variable.....	31
14. Systèmes linéaires.....	34
15. Nombres complexes.....	39
16. Trigonométrie et nombres complexes.....	41
17. Sommes et produits.....	44
18. Coefficients binomiaux.....	49
19. Manipulation des fonctions usuelles.....	53
20. Suites numériques.....	55
21. Développements limités.....	58
22. Calcul matriciel.....	61
23. Algèbre linéaire.....	66
24. Équations différentielles.....	69
25. Fonctions de deux variables.....	72

Fiche n° 1. Fractions

Réponses

1.1 a).....	$\frac{4}{5}$	1.3 c).....	$\frac{-10}{3}$	1.7	$\frac{n^3 + n}{n + 1}$
1.1 b).....	2^5	1.3 d).....	$1\ 000$	1.8 a).....	$4 + \frac{5}{6}$
1.1 c).....	3	1.4	$\frac{16}{35}$	1.8 b).....	$1 + \frac{1}{k - 1}$
1.1 d).....	$-2 \times 3^{3k-2}$	1.5 a).....	$2\ 022$	1.8 c).....	$3 + \frac{5}{x - 2}$
1.2 a).....	$\frac{1}{6}$	1.5 b).....	$\frac{1}{2}$	1.9	$2t$
1.2 b).....	$\frac{7}{15}$	1.5 c).....	1	1.10 a).....	$\frac{3}{5} > \frac{5}{9}$
1.2 c).....	9	1.5 d).....	2	1.10 b).....	$\frac{12}{11} > \frac{10}{12}$
1.2 d).....	$\frac{1}{9}$	1.6 a).....	$\frac{-1}{n(n+1)^2}$	1.10 c).....	$\frac{125}{25} = \frac{105}{21}$
1.3 a).....	247	1.6 b).....	$-\frac{ab}{a-b}$	1.11	Non
1.3 b).....	$\frac{203}{24}$	1.6 c).....	$\frac{3}{2}n$	1.12	$A > B$

Corrigés

1.1 a) $\frac{32}{40} = \frac{8 \times 4}{8 \times 5} = \frac{4}{5}$

1.1 b) $8^3 \times \frac{1}{4^2} = (2 \times 4)^3 \times \frac{1}{4^2} = 2^3 \times 4^3 \times \frac{1}{4^2} = 2^3 \times 4 = 2^5$

1.1 c) $\frac{27^{-1} \times 4^2}{3^{-4} \times 2^4} = \frac{(3^3)^{-1} \times (2^2)^2}{3^{-4} \times 2^4} = \frac{3^4}{3^3} = 3$

1.1 d) On a : $\frac{(-2)^{2k+1} \times 3^{2k-1}}{4^k \times 3^{-k+1}} = \frac{(-2) \times (-2)^{2k} \times 3^{2k} \times 3^{-1}}{4^k \times 3^{-k} \times 3} = \frac{(-2) \times 4^k \times 3^{2k} \times 3^k}{4^k \times 3^2} = -2 \times 3^{3k-2}$.

1.2 a) On met au même dénominateur : $\frac{2}{4} - \frac{1}{3} = \frac{2 \times 3}{4 \times 3} - \frac{1 \times 4}{3 \times 4} = \frac{6}{12} - \frac{4}{12} = \frac{6-4}{12} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$.

1.2 b) On transforme 0,2 en fraction et on met au même dénominateur :

$$\frac{2}{3} - 0,2 = \frac{2}{3} - \frac{2}{10} = \frac{2 \times 10}{3 \times 10} - \frac{2 \times 3}{10 \times 3} = \frac{20}{30} - \frac{6}{30} = \frac{20-6}{30} = \frac{14}{30} = \frac{7 \times 2}{15 \times 2} = \frac{7}{15}.$$

1.2 c) Pour multiplier des fractions, on multiplie les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux :

$$\frac{36}{25} \times \frac{15}{12} \times 5 = \frac{36}{25} \times \frac{15}{12} \times \frac{5}{1} = \frac{36 \times 15 \times 5}{25 \times 12 \times 1} = \frac{12 \times 3 \times 5 \times 3 \times 5}{5 \times 5 \times 12 \times 1} = \frac{3 \times 3}{1} = \frac{9}{1} = 9.$$

1.2 d) Pour diviser une fraction par une autre, on la multiplie par la fraction inverse de la deuxième fraction :

$$-\frac{2}{15} \div \left(-\frac{6}{5}\right) = -\frac{2}{15} \times \left(-\frac{5}{6}\right) = \frac{2}{15} \times \frac{5}{6} = \frac{2 \times 5}{15 \times 6} = \frac{2 \times 5}{3 \times 5 \times 2 \times 3} = \frac{1}{9}.$$

1.3 a) On développe :

$$(2 \times 3 \times 5 \times 7) \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} \right) = \frac{2 \times 3 \times 5 \times 7}{2} + \frac{2 \times 3 \times 5 \times 7}{3} + \frac{2 \times 3 \times 5 \times 7}{5} + \frac{2 \times 3 \times 5 \times 7}{7} \\ = 3 \times 5 \times 7 + 2 \times 5 \times 7 + 2 \times 3 \times 7 + 2 \times 3 \times 5 = 105 + 70 + 42 + 30 = 247.$$

1.3 b) On simplifie d'abord, puis on applique les règles de calcul :

$$\left(\frac{136}{15} - \frac{28}{5} + \frac{62}{10} \right) \times \frac{21}{24} = \left(\frac{136}{15} - \frac{28}{5} + \frac{31}{5} \right) \times \frac{7}{8} \\ = \left(\frac{136}{15} + \frac{3}{5} \right) \times \frac{7}{8} = \left(\frac{136}{15} + \frac{9}{15} \right) \times \frac{7}{8} = \frac{145}{15} \times \frac{7}{8} = \frac{29}{3} \times \frac{7}{8} = \frac{203}{24}.$$

1.3 c) On simplifie d'abord les termes comportant des exposants :

$$\frac{5^{10} \times 7^3 - 25^5 \times 49^2}{(125 \times 7)^3 + 5^9 \times 14^3} = \frac{5^{10} \times 7^3 - 5^{10} \times 7^4}{5^9 \times 7^3 + 5^9 \times 7^3 \times 2^3} = \frac{5^{10} \times 7^3(1-7)}{5^9 \times 7^3(1+2^3)} = \frac{5 \times (-6)}{9} = \frac{-10}{3}.$$

1.3 d) On calcule :

$$\frac{1\,978 \times 1\,979 + 1\,980 \times 21 + 1\,958}{1\,980 \times 1\,979 - 1\,978 \times 1\,979} = \frac{1\,978 \times 1\,979 + 1\,979 \times 21 + 21 + 1\,958}{1\,979 \times (1\,980 - 1\,978)} \\ = \frac{1\,979 \times (1\,978 + 21) + 1\,979}{1\,979 \times 2} = \frac{1\,979 \times (1\,978 + 21 + 1)}{1\,979 \times 2} = \frac{1\,979 \times 2\,000}{1\,979 \times 2} \\ = 1\,000.$$

1.4 On calcule :

$$\frac{0,5 - \frac{3}{17} + \frac{3}{37}}{\frac{5}{6} - \frac{5}{17} + \frac{5}{37}} + \frac{0,5 - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - 0,2}{\frac{7}{5} - \frac{7}{4} + \frac{7}{3} - 3,5} = \frac{\frac{3}{6} - \frac{3}{17} + \frac{3}{37}}{\frac{5}{6} - \frac{5}{17} + \frac{5}{37}} + \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5}}{\frac{7}{5} - \frac{7}{4} + \frac{7}{3} - \frac{7}{2}} \\ = \frac{3\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{17} + \frac{1}{37}\right)}{5\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{17} + \frac{1}{37}\right)} + \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5}}{-7\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right)} = \frac{3}{5} - \frac{1}{7} = \frac{16}{35}.$$

1.5 a) On connaît l'identité remarquable : $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$.

$$\text{Donc : } \frac{2\,022}{(-2\,022)^2 + (-2\,021)(2\,023)} = \frac{2\,022}{(2\,022)^2 + (1-2\,022) \times (1+2\,022)} = \frac{2\,022}{(2\,022)^2 + 1 - 2\,022^2} = 2\,022.$$

1.5 b) On fait apparaître 2 021 dans 2 020 et 2 022 au dénominateur :

$$\frac{2\,021^2}{2\,020^2 + 2\,022^2 - 2} = \frac{2\,021^2}{(2\,021-1)^2 + (2\,021+1)^2 - 2} \\ = \frac{2\,021^2}{2\,021^2 - 2 \times 2\,021 \times 1 + 1 + 1 + 2\,021^2 + 2 \times 2\,021 \times 1 + 1 - 2} \\ = \frac{2\,021^2}{2\,021^2 - 2 \times 2\,021 \times 1 + 2\,021^2 + 2 \times 2\,021 \times 1} = \frac{2\,021}{2\,021 - 2 + 2\,021 + 2} = \frac{1}{2}.$$

1.5 c) En posant $a = 1\,234$, on a : $1\,235 = a + 1$ et $2\,469 = 2a + 1$.

$$\text{Donc : } \frac{1\,235 \times 2\,469 - 1\,234}{1\,234 \times 2\,469 + 1\,235} = \frac{(a+1)(2a+1) - a}{a(2a+1) + a+1} = \frac{2a^2 + 2a + 1}{2a^2 + 2a + 1} = 1.$$

1.5 d) En posant $a = 1\,000$, on a : $999 = a - 1$, $1\,001 = a + 1$, $1\,002 = a + 2$ et $4\,002 = 2a + 2$.

$$\text{Donc : } \frac{4\,002}{1\,000 \times 1\,002 - 999 \times 1\,001} = \frac{4a+2}{a(a+2) - (a-1)(a+1)} = \frac{2(2a+1)}{a^2 + 2a - (a^2 - 1)} = \frac{2(2a+1)}{2a+1} = 2.$$

1.6 a) On met au même dénominateur. Cela donne :

$$\begin{aligned}\frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} &= \frac{n}{n(n+1)^2} + \frac{n(n+1)}{n(n+1)^2} - \frac{(n+1)^2}{n(n+1)^2} = \frac{n + n(n+1) - (n+1)^2}{n(n+1)^2} \\ &= \frac{n + n^2 + n - (n^2 + 2n + 1)}{n(n+1)^2} = \frac{-1}{n(n+1)^2}.\end{aligned}$$

1.6 b) On rappelle la formule : $a^3 - b^3 = (a-b)(ab + a^2 + b^2)$. Cela donne :

$$\frac{a^3 - b^3}{(a-b)^2} - \frac{(a+b)^2}{a-b} = \frac{(a-b)(ab + a^2 + b^2)}{(a-b)^2} - \frac{(a+b)^2}{a-b} = \frac{ab + a^2 + b^2}{a-b} - \frac{a^2 + 2ab + b^2}{a-b} = -\frac{ab}{a-b}.$$

1.6 c) Pour $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1, 2\}$, on a :

$$\frac{\frac{6(n+1)}{n(n-1)(2n-2)}}{\frac{2n+2}{n^2(n-1)^2}} = \frac{6(n+1)}{n(n-1)(2n-2)} \times \frac{n^2(n-1)^2}{2n+2} = \frac{6(n+1)}{2(n-1)} \times \frac{n(n-1)}{2(n+1)} = \frac{3}{2}n.$$

1.7

$$\text{De } \sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2}, \text{ on a : } \frac{\sum_{k=0}^{n^2} k}{\sum_{k=0}^n k} = \frac{\frac{n^2(n^2+1)}{2}}{\frac{n(n+1)}{2}} = \frac{n^2(n^2+1)}{2} \frac{2}{n(n+1)} = \frac{n(n^2+1)}{n+1} = \frac{n^3+n}{n+1}.$$

1.8 a)

$$\text{On trouve } \frac{29}{6} = \frac{4 \times 6 + 5}{6} = 4 + \frac{5}{6}.$$

1.8 b)

$$\text{On trouve } \frac{k}{k-1} = \frac{k-1+1}{k-1} = 1 + \frac{1}{k-1}.$$

1.8 c)

$$\text{On trouve } \frac{3x-1}{x-2} = \frac{3(x-2)+5}{x-2} = 3 + \frac{5}{x-2}.$$

1.9

Pour $t \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, on a :

$$A = \frac{1}{1+t^2} - \frac{1}{(1+t)^2} = \frac{(1+t)^2}{(1+t^2)(1+t)^2} - \frac{1+t^2}{(1+t^2)(1+t)^2} = \frac{1+2t+t^2 - (1+t^2)}{(1+t^2)(1+t)^2} = \frac{2t}{(1+t^2)(1+t)^2}.$$

$$\text{Donc, } AB = \left(\frac{2t}{(1+t^2)(1+t)^2} \right) \times (1+t^2)(1+t)^2 = 2t.$$

1.10 a)

$$\frac{3}{5} = \frac{27}{45} > \frac{5}{9} = \frac{25}{45}$$

1.10 c)

$$\frac{125}{25} = 5 = \frac{105}{21}$$

1.11

Nous allons étudier les produits en croix.

On sait que $A = B$, si et seulement si $33\,215 \times 208\,341 = 66\,317 \times 104\,348$. Le nombre de gauche est le produit de deux nombres impair, il est impair. Par contre, le nombre de droite est le produit de deux nombres de parités différentes, il est pair. Par conséquent, l'égalité n'est pas vérifiée. A et B ne sont pas égaux.

1.12

On re-écrit $A = \frac{10^5+1}{10^6+1}$ et $B = \frac{10^6+1}{10^7+1}$. Nous allons étudier les produits en croix.

D'une part calculons : $(10^5+1) \times (10^7+1) = 10^{12} + 10^7 + 10^5 + 1$.

D'autre part : $(10^6+1)^2 = 10^{12} + 2 \times 10^6 + 1$.

Comme $(10^5+1) \times (10^7+1) > (10^6+1) \times (10^6+1)$, on obtient : $A > B$.

Fiche n° 2. Puissances

Réponses

2.1 a).....	10^8	2.2 b).....	5^{-6}	2.3 b).....	$2^{21} \cdot 3$	2.5 a).....	$\frac{x}{x+1}$
2.1 b).....	10^{15}	2.2 c).....	2^7	2.3 c).....	2	2.5 b).....	$\frac{1}{x-2}$
2.1 c).....	10^2	2.2 d).....	$(-7)^{-2}$	2.3 d).....	$2^{38} \cdot 3^{26}$	2.5 c).....	$\frac{2x}{x+1}$
2.1 d).....	10^{-2}	2.2 e).....	3^5	2.4 a).....	8	2.5 d).....	$\frac{2}{x-2}$
2.1 e).....	10^4	2.2 f).....	3^{28}	2.4 b).....	11		
2.1 f).....	10^{-8}	2.3 a).....	$2^{-4} \cdot 3^{-1}$	2.4 c).....	3^{10}		
2.2 a).....	15^4			2.4 d).....	$2^6 \cdot 5$		

Corrigés

2.3 a) $\frac{2^3 \cdot 3^2}{3^4 \cdot 2^8 \cdot 6^{-1}} = \frac{2^3 \cdot 3^2}{3^4 \cdot 2^8 \cdot 2^{-1} \cdot 3^{-1}} = \frac{2^3 \cdot 3^2}{3^{4-1} \cdot 2^{8-1}} = \frac{2^3 \cdot 3^2}{3^3 \cdot 2^7} = 2^{3-7} \cdot 3^{2-3} = 2^{-4} \cdot 3^{-1}.$

2.3 b) On factorise : $2^{21} + 2^{22} = 2^{21} + 2^{21} \cdot 2 = 2^{21} \cdot (1 + 2) = 2^{21} \cdot 3.$

2.3 c) On factorise au numérateur et au dénominateur : $\frac{3^{22} + 3^{21}}{3^{22} - 3^{21}} = \frac{(3 + 1) \cdot 3^{21}}{(3 - 1) \cdot 3^{21}} = \frac{4}{2} = 2.$

2.3 d) On simplifie en appliquant les règles habituelles de calcul avec les puissances, et en exploitant le fait que $(-a)^n = a^n$ lorsque n est pair : $\frac{(3^2 \cdot (-2)^4)^8}{((-3)^5 \cdot 2^3)^{-2}} = \frac{3^{16} \cdot 2^{32}}{3^{-10} \cdot 2^{-6}} = 2^{38} \cdot 3^{26}.$

2.4 a) On fait apparaître les facteurs premiers 2 et 3 : $\frac{8^{17} \cdot 6^{-6}}{9^{-3} \cdot 2^{42}} = \frac{2^{3 \cdot 17} \cdot 2^{-6} \cdot 3^{-6}}{3^{2 \cdot (-3)} \cdot 2^{42}} = \frac{2^{51-6} \cdot 3^{-6}}{3^{-6} \cdot 2^{42}} = 2^{45-42} = 2^3 = 8.$

2.4 b) Avec les facteurs premiers 5 et 11 : $\frac{55^2 \cdot 121^{-2} \cdot 125^2}{275 \cdot 605^{-2} \cdot 25^4} = \frac{(5 \cdot 11)^2 \cdot (11^2)^{-2} \cdot (5^3)^2}{5^2 \cdot 11 \cdot (11^2 \cdot 5)^{-2} \cdot (5^2)^4} = \frac{5^8 \cdot 11^{-2}}{5^8 \cdot 11^{-3}} = 11.$

2.4 c) On fait apparaître les facteurs premiers 2, 3 et 5 : $\frac{12^{-2} \cdot 15^4}{25^2 \cdot 18^{-4}} = \frac{(2^2)^{-2} \cdot 3^{-2} \cdot 3^4 \cdot 5^4}{(5^2)^2 \cdot 2^{-4} \cdot (3^2)^{-4}} = \frac{2^{-4} \cdot 3^2 \cdot 5^4}{2^{-4} \cdot 3^{-8} \cdot 5^4} = 3^{10}.$

2.4 d) Même méthode que précédemment : $\frac{36^3 \cdot 70^5 \cdot 10^2}{14^3 \cdot 28^2 \cdot 15^6} = \frac{2^6 \cdot 3^6 \cdot 2^5 \cdot 5^5 \cdot 7^5 \cdot 2^2 \cdot 5^2}{2^3 \cdot 7^3 \cdot 2^4 \cdot 7^2 \cdot 3^6 \cdot 5^6} = \frac{2^{13} \cdot 3^6 \cdot 5^7 \cdot 7^5}{2^7 \cdot 3^6 \cdot 5^6 \cdot 7^5} = 2^6 \cdot 5.$

2.5 a) On met au même dénominateur les deux premières écritures fractionnaires : $\frac{x}{x-1} - \frac{2}{x+1} - \frac{2}{x^2-1} = \frac{x(x+1) - 2(x-1)}{(x-1)(x+1)} - \frac{2}{x^2-1} = \frac{x^2+x-2x+2}{(x+1)(x-1)} - \frac{2}{(x+1)(x-1)} = \frac{x^2-x}{(x+1)(x-1)} = \frac{x}{x+1}$

2.5 b) Même méthode : $\frac{2}{x+2} - \frac{1}{x-2} + \frac{8}{x^2-4} = \frac{2(x-2) - (x+2)}{(x+2)(x-2)} + \frac{8}{(x+2)(x-2)} = \frac{2x-4-x-2+8}{(x+2)(x-2)} = \frac{1}{x-2}$

2.5 c) On commence par simplifier les puissances superflues, puis c'est le même principe que précédemment : $\frac{x^2}{x^2-x} + \frac{x^3}{x^3+x^2} - \frac{2x^2}{x^3-x} = \frac{x}{x-1} + \frac{x}{x+1} - \frac{2x}{x^2-1} = \frac{x(x+1+x-1)}{(x-1)(x+1)} - \frac{2x}{(x+1)(x-1)} = \frac{2x^2-2x}{(x+1)(x-1)} = \frac{2x}{x+1}$

2.5 d) $\frac{1}{x} + \frac{x+2}{x^2-4} + \frac{2}{x^2-2x} = \frac{1}{x} + \frac{x+2}{(x+2)(x-2)} + \frac{2}{x(x-2)} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x-2} + \frac{2}{x(x-2)} = \frac{x-2+x}{x(x-2)} + \frac{2}{x(x-2)} = \frac{2}{x-2}$

Fiche n° 3. Calcul littéral

Réponses

3.1 a) $8x^3 - 6x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{1}{8}$

3.1 b) $x^5 - 2x^4 + x^3 - x^2 + 2x - 1$

3.1 c) $x^5 - x^3 + x^2 - 1$

3.1 d) $x^5 + 2x^4 + x^3 - x^2 - 2x - 1$

3.1 e) $x^5 - x^3 - x^2 + 1$

3.1 f) $x^4 + x^2 + 1$

3.2 a) $-2 + 12x - 17x^2 + 8x^3 - 3x^4$

3.2 b) $-28 + 21x$

3.2 c) $2 - x + x^3 - x^4 - x^5$

3.2 d) $-1 - 3x - 3x^2 + x^3$

3.2 e) $1 + x^4$

3.2 f) $1 + 2x + 3x^2 + 2x^3 + x^4$

3.3 a) $-6(6x + 7)$

3.3 b) $4(5x + 4)(-5x + 1)$

3.3 c) $2(3x - 4)(10x + 3)$

3.3 d) $-8(x + 1)(x + 16)$

3.4 a) $(x - 1)^2$

3.4 b) $(x + 2)^2$

3.4 c) $(x + 1)(x + 2)$

3.4 d) $3\left(x + \frac{7 - \sqrt{37}}{6}\right)\left(x + \frac{7 + \sqrt{37}}{6}\right)$

3.4 e) $2\left(x + \frac{3 - \sqrt{233}}{4}\right)\left(x + \frac{3 + \sqrt{233}}{4}\right)$

3.4 f) $-5(x - 1)\left(x - \frac{1}{5}\right)$

3.5 a) $(x + y - z)(x + y + z)$

3.5 b) $(14x + 3y)(-12x + 3y)$

3.5 c) $(x + 1)(y + 1)$

3.5 d) $(x - 1)(y - 1)$

3.5 e) $(x + y)(x + 1)^2$

3.5 f) $(a^2 + b^2)(y - 4x^2)(y + 4x^2)$

3.6 a) $(x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)$

3.6 b) $-8(x^2 + 1)(x - 4)(x + 4)$

3.6 c) $(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$

3.6 d) $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)$

3.6 e) $(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)(p^2 + q^2 + r^2 + s^2)$

Corrigés

3.1 a) On utilise directement l'identité remarquable $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

3.1 b) On peut écrire : $(x - 1)^3(x^2 + x + 1) = (x^3 - 3x^2 + 3x - 1)(x^2 + x + 1) = x^5 - 2x^4 + x^3 - x^2 + 2x - 1$. Pour être "efficace", il suffit de rechercher directement le coefficient du terme d'un degré donné (sachant que $(ax^n)(bx^p) = abx^{n+p}$). Par exemple, dans l'expression finale et en utilisant l'étape intermédiaire, le coefficient du terme de degré 2 est donné par $(-3) \times 1 + 3 \times 1 + (-1) \times 1 = -1$. Ici, l'étape intermédiaire n'étant pas compliquée (à effectuer et à retenir), on peut (éventuellement) se passer de l'écrire.

3.1 c) Connaissant les identités remarquables $(x - 1)(x + 1) = x^2 - 1$ et $(x + 1)(x^2 - x + 1) = x^3 + 1$, on a facilement :

$$(x + 1)^2(x - 1)(x^2 - x + 1) = [(x + 1)(x - 1)][(x + 1)(x^2 - x + 1)] = (x^2 - 1)(x^3 + 1) = x^5 - x^3 + x^2 - 1.$$

Que pensez-vous de la nécessité d'écrire les étapes intermédiaires ?

3.1 d) On calcule : $(x + 1)^2(x - 1)(x^2 + x + 1) = (x^2 + 2x + 1)(x^3 - 1) = x^5 + 2x^4 + x^3 - x^2 - 2x - 1$.

3.1 e) On calcule : $(x-1)^2(x+1)(x^2+x+1) = (x^2-1)(x^3-1) = x^5 - x^3 - x^2 + 1$.

3.3 a) Une identité remarquable fait apparaître le facteur commun $6x+7$. On calcule alors

$$-(6x+7)(6x-1) + 36x^2 - 49 = -(6x+7)(6x-1) + (6x)^2 - 7^2 = (6x+7)[-(6x-1) + 6x - 7] = -6(6x+7)$$

3.3 b) On calcule $25 - (10x+3)^2 = 5^2 - (10x+3)^2 = (10x+8)(-10x+2) = 4(5x+4)(-5x+1)$.

3.4 c) La forme canonique est $\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$. On en déduit la factorisation à l'aide de l'identité remarquable $a^2 - b^2 = \dots$

3.4 d) La forme canonique est $3\left[\left(x + \frac{7}{6}\right)^2 - \frac{37}{36}\right]$.

3.4 e) La forme canonique est $2\left[\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{233}{16}\right]$.

3.4 f) La forme canonique est $-5\left[\left(x - \frac{3}{5}\right)^2 - \frac{4}{25}\right]$.

3.5 b) On calcule $x^2 + 6xy + 9y^2 - 169x^2 = (x+3y)^2 - (13x)^2 = (14x+3y)(-12x+3y)$.

3.5 e) On calcule $x^3 + x^2y + 2x^2 + 2xy + x + y = (x+y)(x^2+2x+1) = (x+y)(x+1)^2$.

3.6 a) On calcule $x^4 - 1 = (x^2-1)(x^2+1) = (x-1)(x+1)(x^2+1)$.

3.6 b) On calcule $(-9x^2+24)(8x^2+8)+64x^4-64 = -8(x^2+1)[9x^2-24-8(x^2-1)] = -8(x^2+1)(x-4)(x+4)$.

3.6 c) On calcule $x^4 + x^2 + 1 = x^4 + 2x^2 + 1 - x^2 = (x^2+1) - x^2 = (x^2+x+1)(x^2-x+1)$. La factorisation est alors terminée sur $\mathbb{R}$ puisque les deux équations, $x^2+x+1=0$ et $x^2-x+1=0$, n'ont pas de solutions réelles.

3.6 d) Une fois n'est pas coutume : on peut commencer par développer avant de factoriser. Ce qui donne

$$(ac+bd)^2 + (ad-bc)^2 = a^2c^2 + b^2d^2 + a^2d^2 + b^2c^2 = (a^2+b^2)(c^2+d^2).$$

Remarque : signalons tout de même qu'une autre voie (sans calcul) consiste à interpréter en termes de module d'un produit de deux nombres complexes !

Fiche n° 4. Racines carrées

Réponses

4.1 a).....	$\boxed{5}$	4.3 a)	$\boxed{2 - \sqrt{2} - \sqrt{3} + \frac{1}{2}\sqrt{6}}$	4.5 c).....	$\boxed{1 + \sqrt{x-1}}$
4.1 b).....	$\boxed{\sqrt{3} - 1}$	4.3 b)	$\boxed{3 - 2\sqrt{2}}$	4.5 d)	$\boxed{\frac{1}{2} \frac{1}{x-1}}$
4.1 c).....	$\boxed{-\sqrt{3} + 2}$	4.3 c).....	$\boxed{1 - \sqrt{10} + \sqrt{15}}$	4.5 e)	$\boxed{\frac{x(x-2)}{(x-1)\sqrt{x-1}}}$
4.1 d).....	$\boxed{\sqrt{7} - 2}$	4.3 d)....	$\boxed{\sqrt{15} + \sqrt{10} - \sqrt{6} - 2}$	4.5 f)	$\boxed{-4(x-1)^2}$
4.1 e).....	$\boxed{\pi - 3}$	4.3 e)	$\boxed{-(\sqrt{2} + \sqrt{3})}$	4.6 a).....	$\boxed{\sqrt{2}}$
4.1 f).....	$\boxed{ 3 - a }$	4.3 f)	$\boxed{-\frac{3 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6}}{2}}$	4.6 b)	$\boxed{2\sqrt{2}}$
4.2 a)	$\boxed{20}$	4.3 g).....	$\boxed{2\sqrt{2}}$	4.7 a).....	$\boxed{-11 + 5\sqrt{5}}$
4.2 b)	$\boxed{9 + 4\sqrt{5}}$	4.3 h)	$\boxed{50 - 25\sqrt{3}}$	4.7 b).....	$\boxed{1 + \sqrt{2}}$
4.2 c).....	$\boxed{1 + \sqrt{3}}$	4.4	$\boxed{\frac{\sqrt{2} + 2 - \sqrt{6}}{4}}$	4.7 c).....	$\boxed{1 + \sqrt{2}}$
4.2 d).....	$\boxed{3 + \sqrt{2}}$	4.5 a).....	$\boxed{\frac{x}{\sqrt{x-1}}}$	4.7 d).....	$\boxed{\sqrt{3}}$
4.2 e).....	$\boxed{12\sqrt{7}}$	4.5 b).....	$\boxed{x - \sqrt{x^2 - 1}}$	4.7 e).....	$\boxed{1 + \sqrt{5}}$
4.2 f).....	$\boxed{12}$			4.7 f)	$\boxed{\ln(1 + \sqrt{2})}$
4.2 g).....	$\boxed{9 - \frac{10}{3}\sqrt{2}}$			4.8	$\boxed{1}$
4.2 h)	$\boxed{10}$				

Corrigés

4.1 a) Quand a est un réel positif, $\sqrt{a}$ est le nombre positif dont le carré vaut a donc $\sqrt{(-5)^2} = 5$.

4.1 f) On trouve $|3 - a|$, c'est-à-dire $3 - a$ si $a \leq 3$ et $a - 3$ si $a \geq 3$.

4.2 c) On essaie de reconnaître une identité remarquable dans la racine :

$$\sqrt{4 + 2\sqrt{3}} = \sqrt{1 + 2\sqrt{3} + 3} = \sqrt{(1 + \sqrt{3})^2} = 1 + \sqrt{3}.$$

4.3 a) On calcule :

$$\begin{aligned} \frac{2 - \sqrt{3}}{2 + \sqrt{2}} &= \frac{2 - \sqrt{3}}{2 + \sqrt{2}} \times \frac{2 - \sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}} = \frac{(2 - \sqrt{3})(2 - \sqrt{2})}{(2 + \sqrt{2})(2 - \sqrt{2})} \\ &= \frac{(2 - \sqrt{3})(2 - \sqrt{2})}{2^2 - 2} = \frac{4 - 2\sqrt{2} - 2\sqrt{3} + \sqrt{6}}{2} \\ &= 2 - \sqrt{2} - \sqrt{3} + \frac{1}{2}\sqrt{6}. \end{aligned}$$

4.4 On pose $A := \frac{1}{1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}}$. On a :

$$A = \frac{1}{1 + (\sqrt{2} + \sqrt{3})} = \frac{1 - (\sqrt{2} + \sqrt{3})}{(1 + (\sqrt{2} + \sqrt{3}))(1 - (\sqrt{2} + \sqrt{3}))} = \frac{1 - (\sqrt{2} + \sqrt{3})}{1 - (\sqrt{2} + \sqrt{3})^2} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3} - 1}{4 + 2\sqrt{6}}.$$

Ainsi, la technique de la « quantité conjuguée » n'est pas suffisante ici ; mais on peut la réappliquer. On a

$$A = \frac{(\sqrt{2} + \sqrt{3} - 1)(4 - 2\sqrt{6})}{(4 + 2\sqrt{6})(4 - 2\sqrt{6})} = \frac{4\sqrt{2} - 4\sqrt{3} + 4\sqrt{3} - 6\sqrt{2} - 4 + 2\sqrt{6}}{16 - 24} = \frac{2\sqrt{2} + 4 - 2\sqrt{6}}{8} = \frac{\sqrt{2} + 2 - \sqrt{6}}{4}.$$

Ainsi, on a $\boxed{\frac{1}{1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2} + 2 - \sqrt{6}}{4}}$: ce qu'on cherchait.

Remarque : on pouvait aussi faire un autre type de quantité conjuguée :

$$\frac{1}{1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}} = \frac{1 + \sqrt{2} - \sqrt{3}}{(1 + \sqrt{2} + \sqrt{3})(1 + \sqrt{2} - \sqrt{3})} = \frac{1 + \sqrt{2} - \sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2} + 2 - \sqrt{6}}{4}.$$

4.5 c) On essaie de reconnaître une identité remarquable dans la racine :

$$\sqrt{x + 2f(x)} = \sqrt{x + 2\sqrt{x-1}} = \sqrt{\sqrt{x-1}^2 + 2\sqrt{x-1} + 1} = \sqrt{(\sqrt{x-1} + 1)^2} = \sqrt{x-1} + 1.$$

4.5 e) Le calcul donne $f''(x) = -\frac{1}{4} \frac{1}{(x-1)^{3/2}}$ d'où :

$$f(x) + 4f''(x) = \sqrt{x-1} - \frac{1}{(x-1)\sqrt{x-1}} = \frac{1}{(x-1)\sqrt{x-1}}((x-1)^2 - 1) = \frac{x(x-2)}{(x-1)\sqrt{x-1}}.$$

4.6 a) On calcule :

$$\left(\sqrt{3 + \sqrt{5}} - \sqrt{3 - \sqrt{5}}\right)^2 = 3 + \sqrt{5} - 2\sqrt{3 + \sqrt{5}}\sqrt{3 - \sqrt{5}} + 3 - \sqrt{5} = 6 - 2\sqrt{9 - 5} = 6 - 2\sqrt{4} = 6 - 4 = 2.$$

De plus, $\sqrt{3 + \sqrt{5}} - \sqrt{3 - \sqrt{5}} \geq 0$, donc $\sqrt{3 + \sqrt{5}} - \sqrt{3 - \sqrt{5}} = \sqrt{2}$.

4.7 b) On calcule $3 + 2\sqrt{2} = 2 + 2\sqrt{2} + 1 = (\sqrt{2})^2 + 2 \times 1 \times \sqrt{2} + 1^2 = (1 + \sqrt{2})^2$ et on trouve donc

$$\sqrt{3 + 2\sqrt{2}} = 1 + \sqrt{2}.$$

4.7 e) On calcule : $2\sqrt{\frac{3 + \sqrt{5}}{2}} = \sqrt{6 + 2\sqrt{5}} = \sqrt{1 + 2\sqrt{5} + 5} = \sqrt{(1 + \sqrt{5})^2} = 1 + \sqrt{5}.$

4.8 Appelons A ce nombre barbare, et écrivons-le $A = \alpha - \beta$ en posant

$$\alpha = \sqrt[3]{3 + \sqrt{9 + \frac{125}{27}}} \text{ et } \beta = \sqrt[3]{-3 + \sqrt{9 + \frac{125}{27}}}.$$

Plutôt que de se lancer dans des choses compliquées, calculons A^3 à l'aide de l'identité remarquable. On a

$$A^3 = \alpha^3 - 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 - \beta^3 = \alpha^3 - \beta^3 - 3\alpha\beta(\alpha - \beta)$$

ce qui donne

$$A^3 = 6 - 3A \sqrt[3]{\left(3 + \sqrt{9 + \frac{125}{27}}\right)\left(-3 + \sqrt{9 + \frac{125}{27}}\right)}$$

d'où finalement $A^3 = 6 - 5A$, ce qui est équivalent à $(A - 1)(A^2 + A + 6) = 0$ en observant que 1 est racine évidente de l'équation $t^3 + 5t - 6 = 0$ d'inconnue t , puis finalement 1 est l'unique racine réelle de cette équation, et donc $A = 1$.

Fiche n° 5. Expressions algébriques

Réponses

5.1 a)	$7a^2 + 12a + 7$	5.3 c)	$-4 + 43i\sqrt{5}$	5.6 a)	$a^2 - 2b$
5.1 b)	$a^2 - a - 1$	5.3 d)	1	5.6 b)	$ab - 3c$
5.1 c)	$4a^2 - a - 3$	5.4 a)	3	5.6 c)	$a^3 - 3ab + 3c$
5.1 d)	$-a^2 + 1$	5.4 b)	1	5.6 d)	$ab - c$
5.2 a)	$8 + 6i$	5.4 c)	1	5.6 e)	ac
5.2 b)	$8 - 6i$	5.4 d)	0	5.6 f)	$-2ac + b^2$
5.2 c)	$18 - 26i$	5.4 e)	-1	5.7 a)	$a^2b - ac - 2b^2$
5.2 d)	$-9 - 46i$	5.4 f)	31	5.7 b) ...	$a^4 - 4a^2b + 4ac + 2b^2$
5.3 a)	$39 - 18i$	5.5 a)	$a^2 + 2$	5.7 c)	0
5.3 b)	2197	5.5 b)	$a^3 + 3a$	5.7 d)	1
		5.5 c)	$a^4 + 4a^2 + 2$	5.7 e)	a

Corrigés

5.1 a) On développe $(a + 2)^3 = a^3 + 6a^2 + 12a + 8$, puis on simplifie sachant que $a^3 = a^2 - 1$.

5.1 b) De $a^3 = a^2 - 1$, on déduit $a^6 = a^3(a^2 - a) = a^5 - a^4$ et donc $a^5 - a^6 = a^4$. De plus $a^4 = a(a^2 - 1)$, etc.

5.1 c) On commence par $a^6 = (a^3)^2 = (a^2 - 1)^2 = a^4 - 2a^2 + 1 = -a^2 - a$ puis $a^{12} = (-a^2 - a)^2 = a^4 + 2a^3 + a^2$.

5.1 d) L'égalité $a^3 - a^2 + 1$ peut s'écrire $a(a - a^2) = 1$ ce qui montre que $a \neq 0$ et $\frac{1}{a} = a - a^2$. Alors $\frac{1}{a^2} = 1 - a$.

5.2 a) On développe : $(3 + i)^2 = 9 + 6i + i^2$.

5.2 b) On développe : $(3 - i)^2 = 9 + 6(-i) + (-i)^2 = 9 - 6i + i^2$.

5.2 c) D'après le calcul précédent : $(3 - i)^3 = (8 - 6i)(3 - i) = 24 - 18i - 8i + 6i^2$.

5.2 d) On développe directement : $(3 - 2i)^3 = 3^3 - 3 \cdot 3^2(2i)^1 + 3 \cdot 3^1(2i)^2 - (2i)^3$.

5.3 a) On développe : $24 - 30i + 12i - 15i^2$.

5.3 b) En remarquant que $(2 + 3i)(2 - 3i) = 2^2 - (3i)^2 = 4 + 9$, on obtient par associativité 13^3 .

5.3 c) On développe : $(-4 + i\sqrt{5})^3 = -4^3 + 3 \cdot 4^2(i\sqrt{5}) - 3 \cdot 4^1(i\sqrt{5})^2 + (i\sqrt{5})^3 = -64 + 48i\sqrt{5} + 60 - 5i\sqrt{5}$.

5.3 d) On développe : $(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})^3 = -\frac{1}{8} + 3 \cdot i\frac{\sqrt{3}}{8} + 3 \cdot \frac{3}{8} - i\frac{3\sqrt{3}}{8}$.

5.4 a) De $a^5 = 1$, on déduit $a^7 = a^2$ et $a^6 = a$ donc tous les termes se simplifient sauf deux : $4 - 1 = 3$.

5.4 b) On commence par $a^{1234} = (a^{10})^{123} \times a^4 = a^4$ car $a^{10} = (a^5)^2 = 1$. De même $a^{2341} = a^1$, etc. et on obtient donc finalement $a^4 \times a^1 \times a^2 \times a^3 = a^{10} = 1$.

5.4 c) Ceci vaut a^S où $S = \sum_{k=0}^{1234} k = \frac{1234 \times (1234 + 1)}{2}$ est un entier multiple de 5.

5.4 d) Cette somme partielle de suite géométrique vaut $\frac{a^5 - 1}{a - 1}$.

5.4 e) Cette somme géométrique vaut $\frac{a^{99} - 1}{a - 1} \times a^1 = \frac{a^{100} - a}{a - 1} = \frac{1 - a}{a - 1} = -1$.

5.4 f) En réordonnant les facteurs et en développant, on obtient :

$$(2 - a^1)(2 - a^4)(2 - a^2)(2 - a^3) = (5 - 2(a + a^4))(5 - 2(a^2 + a^3)) = 25 - 10(a + a^2 + a^3 + a^4) + 4(a + a^4)(a^2 + a^3).$$

Or $a + a^2 + a^3 + a^4 = -1$ et $(a + a^4)(a^2 + a^3) = a^3 + a^6 + a^4 + a^7 = a + a^2 + a^3 + a^4 = -1$ aussi.

5.5 a) On complète le carré : $x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{1}{x}$.

5.5 b) On se ramène au résultat précédent : $x^3 - \frac{1}{x^3} = x\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - \frac{1}{x}\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + \left(x - \frac{1}{x}\right) = a(a^2 + 2) + a$.

5.5 c) De même : $x^4 + \frac{1}{x^4} = x^2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + \frac{1}{x^2}\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 2 = (a^2 + 2)^2 - 2$.

5.6 a) On développe $(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx)$ puis on conclut par soustraction.

5.6 b) On reconnaît $x(xy + zx) + y(yz + xy) + z(zx + yz) = (x + y + z)(xy + yz + zx) - 3xyz$.

5.6 c) Le développement $(x + y + z)^3 = x^3 + y^3 + z^3 + 3[x^2(y + z) + y^2(z + x) + z^2(x + y)] + 6xyz$ conduit par soustraction à $a^3 - 3(ab - 3c) - 6c$ d'après l'expression précédente.

5.6 d) *Première solution* : on développe et on obtient une combinaison des expressions précédentes.

Deuxième solution : on reconnaît $(a - z)(a - x)(a - y) = a^3 - (x + y + z)a^2 + (xy + yz + zx)a - xyz$.

5.6 e) En factorisant, on reconnaît $(x + y + z)xyz$.

5.6 f) On se ramène à $(xy)^2 + (yz)^2 + (zx)^2 = (xy + yz + zx)^2 - 2(x^2yz + y^2xz + z^2xy)$.

5.7 a) On cherche $x^2(xy + zx) + y^2(yz + xy) + z^2(zx + yz)$, c'est-à-dire $(x^2 + y^2 + z^2)(xy + yz + zx) - x^2yz - y^2zx - z^2xy$.

5.7 b) *Première solution* : on développe $(x + y + z)^4$ puis on conclut par soustraction à l'aide des calculs précédents.

Deuxième solution : on remarque qu'il s'agit de calculer $(x^2)^2 + (y^2)^2 + (z^2)^2 = (x^2 + y^2 + z^2)^2 - 2(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2)$, donc qu'il suffit de développer $(a^2 - 2b)^2 - 2(b^2 - 2ac)$.

5.7 c) On réduit au même dénominateur $(x - y)(y - z)(z - x)$ puis on développe le numérateur.

5.7 d) On réduit au même dénominateur $(x-y)(y-z)(z-x)$ puis on factorise le numérateur par $(z-y)$:

$$\begin{aligned}x^2(z-y) + y^2(x-z) + z^2(y-x) &= x^2(z-y) + (y^2 - z^2)x - yz(y-z) \\ &= (z-y)[x^2 - (y+z)x + yz],\end{aligned}$$

et l'on reconnaît pour le dernier facteur : $x^2 - (y+z)x + yz = (x-y)x - (x-y)z = (x-y)(x-z)$.

.....
5.7 e) On procède de même :

$$\begin{aligned}x^3(z-y) + y^3(x-z) + z^3(y-x) &= x^3(z-y) + (y^3 - z^3)x - yz(y^2 - z^2) \\ &= (z-y)[x^3 - (y^2 + yz + z^2)x + yz(y+z)] \\ &= (z-y)[(x^2 - y^2)x - yz(x-y) - z^2(x-y)] \\ &= (z-y)(x-y)[(x+y)x - yz - z^2] \\ &= (z-y)(x-y)[(x^2 - z^2) + (x-z)y] \\ &= (z-y)(x-y)(x-z)[(x+z) + y],\end{aligned}$$

d'où $x + y + z = a$ après simplification par le dénominateur.

Fiche n° 6. Équations du second degré

Réponses

- 6.1 a) $3, 3$
- 6.1 b) $-1/3, -1/3$
- 6.1 c) $2, -6$
- 6.1 d) $2, 3$
- 6.1 e) $0, \text{ donc } 5$
- 6.1 f) $0, \text{ donc } -3/2$
- 6.1 g) $\emptyset$
- 6.1 h) $1 \text{ donc } -5$
- 6.1 i) $1 \text{ donc } 8/3$
- 6.1 j) $-1 \text{ donc } -19/5$
- 6.2 a) $6, 7$
- 6.2 b) $-3, -5$
- 6.2 c) $-7, -11$
- 6.2 d) $-3, 11$
- 6.2 e) a, b
- 6.2 f) $a - b, a + b$
- 6.3 a) $2/3$
- 6.3 b) $-2/7$
- 6.3 c) $-1/m$
- 6.3 d) $2m/(m + 3)$
- 6.4 a) $1 \text{ donc } (a - b)/(b - c)$
- 6.4 b) $1 \text{ donc } c(a - b)/(a(b - c))$
- 6.4 c) $m \text{ donc } -(m + a + b)$
- 6.4 d) $m \text{ donc } m(a - b)/(b - c)$
- 6.4 e) $m \text{ donc } ab/m$
- 6.4 f) $a + b \text{ puis } 2ab/(a + b).$
- 6.5 a) $x^2 - 22x + 117 = 0$
- 6.5 b) $x^2 - 6x - 187 = 0$
- 6.5 c) $x^2 - 4x + 1 = 0$
- 6.5 d) $x^2 - 2mx + 3 = 0$
- 6.5 e) $2x^2 - (4m + 1)x + (2m^2 + m - 15) = 0$
- 6.5 f) $m^2x^2 + (m - 2m^2)x + (m^2 - m - 2) = 0$
- 6.6 a) $m = -3/4 \text{ et } x = 3/4$
- 6.6 b) ... $m = -1 \text{ et } x = -2, \text{ ou } m = 7 \text{ et } x = 2/3$
- 6.6 c) $m = 1 \text{ et } x = -1 \text{ ou } m = -1 \text{ et } x = 1$
- 6.7 a) $a = 2 \text{ et } b = 3$
- 6.7 b) $a = -2 \text{ et } b = 1$
- 6.7 c) $a = -3 \text{ et } b = 5$
- 6.7 d) $a = 1/2 \text{ et } b = 8$
- 6.7 e) $a = 1 \text{ et } b = 3\sqrt{7}$
- 6.8 a) $] -\infty, 1] \cup [\sqrt{2}, +\infty[$
- 6.8 b) $[-3, 5]$
- 6.8 c) $] -\infty, -1] \cup [2/3, +\infty[$
- 6.8 d) $] -\infty, -1/2[\cup [4, +\infty[$

Corrigés

6.1 a) C'est une identité remarquable : $x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2$.

6.1 c) Le nombre 2 est racine évidente, l'autre est donc -6 en regardant le produit des racines qui vaut -12 .

6.1 e) La racine 0 est la racine évidente par excellence ; la somme des racines valant ici 5 l'autre racine est 5.

6.1 g) La fonction $x \mapsto 2x^2 + 3$ est strictement positive car elle est minorée par 3, donc elle ne s'annule pas.

6.2 a) Ici on cherche des racines un peu moins évidentes : on remplace le problème par le problème équivalent de la détermination de deux nombres x_1, x_2 dont le produit vaut 42 et la somme 13. On teste donc les factorisations évidentes de 42, ici $42 = 6 \times 7$ et $13 = 6 + 7$.

6.2 b) On cherche deux nombres dont le produit vaut 15 et la somme -8 : les nombres -3 et -5 conviennent.

6.4 e) En réduisant au même dénominateur de part et d'autre l'équation devient $m(x^2 + ab) = x(m^2 + ab)$ qui est une équation du second degré. Sur la forme initiale de l'équation on lit que m est racine évidente, l'autre est donc ab/m . Peut-être aurait-on pu voir cette racine « évidente » directement ?

6.4 f) Le nombre 0 est bien tentant, mais n'est pas racine de l'équation. En revanche $a + b$ convient. L'équation se réécrit $(a + b)(x - a)(x - b) = ab(2x - (a + b))$, d'où une équation du second degré dont le coefficient devant x^2 vaut $a + b$ et le terme constant $2ab(a + b)$, donc la deuxième solution de cette équation est $\frac{2ab}{a + b}$.

6.5 a) La somme des racines vaut 22, leur produit 117. L'équation cherchée est donc $x^2 - 22x + 117 = 0$.

6.6 a) Une équation du second degré admet une racine double si, et seulement si, son discriminant est nul.

Ici, le discriminant vaut $\Delta = (2m + 3)^2 - 4m^2 = 3(4m - 1)$. Ainsi, l'équation admet une racine double si, et seulement si, m vaut $-3/4$ ce qui donne $x = 3/4$.

6.6 b) Ici, le déterminant vaut $\Delta = 4(m^2 - 6m - 7)$, donc une racine évidente est -1 donc l'autre vaut 7. Pour $m = -1$ on trouve $x = -2$ et pour $m = 7$ on trouve $x = 2/3$.

6.6 c) Ici le discriminant vaut $\Delta = 4((3m + 1)^2 - (m + 3)^2) = 32(m^2 - 1)$ donc l'équation admet une racine double si et seulement si m vaut 1, auquel cas l'équation s'écrit $x^2 + 2x + 1 = 0$ et la racine double est -1 , ou m vaut -1 , auquel cas l'équation s'écrit $x^2 - 2x + 1 = 0$ dont la racine double est 1.

6.8 a) Un trinôme est du signe du coefficient dominant à l'extérieur de l'intervalle des racines, et du signe opposé entre les racines. Ici, les racines sont $\sqrt{2}$ et 1, le trinôme est donc strictement positif sur $] -\infty, 1[\cup]\sqrt{2}, +\infty[$ et strictement négatif sur $]1, \sqrt{2}[$.

6.8 b) Les racines sont -5 et 3. Le trinôme est donc strictement négatif sur $] -\infty, -3[\cup]5, +\infty[$ et strictement positif sur $] -3, 5[$.

6.8 c) Ici, les racines sont -1 et $2/3$. Le trinôme est donc strictement positif sur $] -\infty, -1[\cup]2/3, +\infty[$ et strictement négatif sur $] -1, 2/3[$.

6.8 d) Le signe d'un quotient est le même que celui d'un produit ! Donc le quotient considéré est strictement positif sur $] -\infty, -1/2[\cup]4, +\infty[$ et strictement négatif sur $] -1/2, 4[$ (attention à l'annulation du dénominateur !).

Fiche n° 7. Exponentielle et Logarithme

Réponses

7.1 a).....	$4 \ln 2$	7.5 b).....	$\frac{1}{2}$	7.8 a).....	$\mathbb{R}$
7.1 b).....	$9 \ln 2$	7.5 c).....	$\frac{1}{3}$	7.8 b).....	ok
7.1 c).....	$-3 \ln 2$	7.5 d).....	$\frac{1}{9}$	7.8 c).....	1
7.1 d).....	$\frac{1}{2} \ln 2$	7.5 e).....	$-\frac{1}{2}$	7.8 d).....	-1
7.1 e).....	$3 \ln 2$	7.5 f).....	$\frac{3}{2}$	7.9 a).....	$x + \ln 2$
7.1 f).....	$2 \ln 2 + 2 \ln 3$	7.6 a).....	-2	7.9 b).....	$\frac{e^x}{\sqrt{1+x}}$
7.2 a).....	$-\ln 3 - 2 \ln 2$	7.6 b).....	$\frac{1}{\ln 2}$	7.9 c).....	$\ln x - 1 $
7.2 b).....	$2 \ln 3 - 2 \ln 2$	7.6 c).....	-17	7.9 d).....	$-\frac{1}{1+x}$
7.2 c).....	$\ln 3 + 11 \ln 2$	7.6 d).....	1	7.9 e).....	$e^{x \ln(1+x)}$
7.2 d).....	$3 \ln 5 + 2 \ln 2$	7.6 e).....	-1	7.10 a).....	$x \geq \frac{\ln 12 + 5}{3}$
7.2 e).....	$-2 \ln 5 + 4 \ln 2$	7.6 f).....	e	7.10 b).....	$x \in [0, 1]$
7.2 f).....	$2 \ln 5 - 2 \ln 2$	7.7 a).....	impaire	7.10 c).....	$x \geq \frac{2}{e}$
7.3.....	$-2 \ln 2 - 2 \ln 5$	7.7 b).....	impaire	7.10 d).....	$x \geq -\frac{1}{12}$
7.4 a).....	$\frac{25}{8} \ln(\sqrt{2} - 1)$	7.7 c).....	impaire	7.10 e).....	$\emptyset$
7.4 b).....	$17 + 12\sqrt{2}$	7.7 d).....	impaire	7.10 f).....	$\frac{-13 - \sqrt{273}}{2}$
7.4 c).....	0				
7.4 d).....	0				
7.5 a).....	8				

Corrigés

7.1 a) On a $16 = 4^2 = 2^4$ donc $\ln 16 = 4 \ln 2$.

7.1 c) On a $0,125 = \frac{1}{8}$ donc $\ln 0,125 = -\ln 8 = -3 \ln 2$.

7.1 e) On a $72 = 8 \times 9 = 2^3 \times 3^2$ donc $\ln 72 - 2 \ln 3 = (3 \ln 2 + 2 \ln 3) - 2 \ln 3 = 3 \ln 2$.

7.2 c) On a $0,875 = \frac{7}{8}$ donc

$$\begin{aligned} \ln 21 + 2 \ln 14 - 3 \ln(0,875) &= (\ln 3 + \ln 7) + 2(\ln 2 + \ln 7) - 3(\ln 7 - \ln 8) \\ &= \ln 3 + 2 \ln 3 + 3 \times 3 \ln 2 = 3 \ln 3 + 11 \ln 2. \end{aligned}$$

7.3 On appelle A ce nombre. On a

$$A = (\ln 1 - \ln 2) + (\ln 2 - \ln 3) + \cdots + (\ln 98 - \ln 99) + (\ln 99 - \ln 100)$$

donc en simplifiant les termes deux par deux finalement il reste $A = \ln 1 - \ln 100$, c'est-à-dire $A = -\ln 100$ où $100 = 2^2 \times 5^2$, d'où le résultat $A = -2(\ln 2 + \ln 5)$

On peut écrire plus rigoureusement ce calcul :

$$\begin{aligned} A &= \sum_{k=1}^{99} \ln \frac{k}{k+1} = \sum_{k=1}^{99} (\ln k - \ln(k+1)) \\ &= \sum_{k=1}^{99} \ln k - \sum_{k=1}^{99} \ln(k+1) = \sum_{k=1}^{99} \ln k - \sum_{j=2}^{100} \ln j \end{aligned}$$

en effectuant le changement d'indice $j = k + 1$ d'où finalement $A = \ln 1 - \ln 100 = -2(\ln 2 + \ln 5)$.

7.4 a) On a $(1 + \sqrt{2})^2 = 3 + 2\sqrt{2}$ et $\frac{1}{\sqrt{2}+1} = \sqrt{2}-1$

On a donc

$$\alpha = \frac{7}{16} \ln(3 + 2\sqrt{2}) - 4 \ln(\sqrt{2} + 1) = \frac{7}{16} \ln((1 + \sqrt{2})^2) + 4 \ln \frac{1}{\sqrt{2}+1} = \frac{7}{8} \ln(1 + \sqrt{2}) + 4 \ln \frac{1}{\sqrt{2}+1}$$

d'où finalement $\alpha = -\frac{7}{8} \ln \frac{1}{1 + \sqrt{2}} + 4 \ln \frac{1}{\sqrt{2}+1} = \frac{25}{8} \ln \frac{1}{\sqrt{2}+1} = \frac{25}{8} \ln(\sqrt{2}-1)$.

7.4 c) On a $\gamma = \ln\left(\left((2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3})\right)^{20}\right) = \ln((4 - 3)^{20}) = 0$

7.6 b) On a $e^{-\ln \ln 2} = e^{(-1) \ln(\ln 2)} = (\ln 2)^{-1} = \frac{1}{\ln 2}$.

7.6 e) On a $\ln\left(\sqrt{\exp(-\ln e^2)}\right) = \frac{1}{2} \ln(\exp(-\ln e^2)) = \frac{1}{2}(-\ln e^2) = \frac{1}{2} \times (-2) = -1$.

7.7 a) f_1 est définie sur $] -2021, +2021[$ qui est symétrique par rapport à 0 et

$$\forall x \in] -2021, +2021[, \quad f(-x) = \ln \frac{2021-x}{2021+x} = \ln \frac{1}{\frac{2021+x}{2021-x}} = -\ln \frac{2021+x}{2021-x} = -f_1(x).$$

7.7 b) On a $\forall x \in \mathbb{R}, \quad x \leq |x| < \sqrt{x^2 + 1}$ donc f_2 est définie sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x on a

$$\begin{aligned} f_2(-x) &= \ln(-x + \sqrt{(-x)^2 + 1}) \\ &= \ln(-x + \sqrt{x^2 + 1}) \\ &= \ln \frac{(-x + \sqrt{x^2 + 1})(x + \sqrt{x^2 + 1})}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \\ &= \ln \frac{-x^2 + (x^2 + 1)}{x + \sqrt{x^2 + 1}} = \ln \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} = -f_2(x). \end{aligned}$$

7.10 f) Attention à l'ensemble de définition de ces deux équations...

Pour la première équation, on cherche les solutions dans $] -\infty, -5[\cap \left(]61, +\infty[\cap] -\infty, -7[\right)$, qui est l'ensemble vide, donc la première équation n'admet aucune solution.

Pour la seconde, on cherche les solutions dans $] -\infty, -5[\cap \left(] -\infty, -7[\cup]61, +\infty[\right)$, c'est-à-dire dans l'intervalle $] -\infty, -7[$. Dans ce cas, un réel x appartenant à $] -\infty, -7[$ est solution de l'équation si et seulement si x vérifie $x^2 + 13x - 26 = 0$. Or, ce trinôme admet deux racines réelles : $x_1 = \frac{-13 - \sqrt{273}}{2}$ et $x_2 = \frac{-13 + \sqrt{273}}{2}$. Seul x_1 convient car $x_1 \in] -\infty, -7[$ et $x_2 \notin] -\infty, -7[$.

Fiche n° 8. Trigonométrie

Réponses

8.1 a) 0

8.1 b) 0

8.1 c) $-1 - \sqrt{3}$

8.1 d) $-\frac{1}{2}$

8.2 a) 0

8.2 b) $-\sin x$

8.2 c) $2 \cos x$

8.2 d) $-2 \cos x$

8.3 a) $\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$

8.3 b) $\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$

8.3 c) $\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$

8.3 d) $\frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1}$

8.4 a) $-\sin x$

8.4 b) $\frac{1}{\cos x}$

8.4 c) 0

8.4 d) $4 \cos^3 x - 3 \cos x$

8.5 a) $\frac{\sqrt{2} + \sqrt{2}}{2}$

8.5 b) $\frac{\sqrt{2} - \sqrt{2}}{2}$

8.6 a) $\tan x$

8.6 b) 2

8.6 c) $8 \cos^4 x - 8 \cos^2 x + 1$

8.7 a) $\left\{ \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3} \right\}$

8.7 a) $\left\{ -\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3} \right\}$

8.7 a) $\left\{ \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$

8.7 b) $\left\{ \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3} \right\}$

8.7 b) $\left\{ \frac{-2\pi}{3}, \frac{-\pi}{3} \right\}$

8.7 b) $\left\{ \frac{4\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \frac{5\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$

8.7 c) $\left\{ \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6} \right\}$

8.7 c) $\left\{ -\frac{5\pi}{6}, -\frac{\pi}{6} \right\}$

8.7 c) $\left\{ \frac{7\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \frac{11\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$

8.7 d) $\left\{ \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4} \right\}$

8.7 d) $\left\{ -\frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{4} \right\}$

8.7 d) $\left\{ \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$

8.7 e) $\left\{ \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4} \right\}$

8.7 e) $\left\{ -\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4} \right\}$

8.7 e) $\left\{ \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}$

8.7 f) $\left\{ \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6} \right\}$

8.7 f) $\left\{ -\frac{5\pi}{6}, -\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6} \right\}$

8.7 f) $\left\{ \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \frac{5\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$

8.7 g) $\left\{ \frac{\pi}{12}, \frac{11\pi}{12}, \frac{13\pi}{12}, \frac{23\pi}{12} \right\}$

8.7 g) $\left\{ -\frac{11\pi}{12}, -\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{12}, \frac{11\pi}{12} \right\}$

8.7 g) $\left\{ \frac{\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \frac{11\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$

8.7 h) $\left\{ \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{3\pi}{2} \right\}$

8.7 h) $\left\{ -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6} \right\}$

8.7 h).....	$\left\{ \frac{\pi}{6} + k\frac{2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \right\}$	8.8 c).....	$\left[-\pi, \frac{\pi}{6} \right] \cup \left[\frac{5\pi}{6}, \pi \right]$
8.7 i).....	$\left\{ \frac{\pi}{7}, \frac{13\pi}{7} \right\}$	8.8 d).....	$\left[0, \frac{\pi}{6} \right] \cup \left[\frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6} \right] \cup \left[\frac{11\pi}{6}, 2\pi \right]$
8.7 i).....	$\left\{ -\frac{\pi}{7}, \frac{\pi}{7} \right\}$	8.8 d).....	$\left[-\pi, -\frac{5\pi}{6} \right] \cup \left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6} \right] \cup \left[\frac{5\pi}{6}, \pi \right]$
8.7 i).....	$\left\{ \frac{\pi}{7} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ -\frac{\pi}{7} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$	8.8 e).....	$\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2} \right] \cup \left[\frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2} \right]$
8.7 j).....	$\left\{ \frac{5\pi}{14}, \frac{9\pi}{14} \right\}$	8.8 e).....	$\left[-\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{2} \right] \cup \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2} \right]$
8.7 j).....	$\left\{ \frac{5\pi}{14}, \frac{9\pi}{14} \right\}$	8.8 f).....	$\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2} \right] \cup \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4} \right] \cup \left[\frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2} \right] \cup \left[\frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{4} \right]$
8.7 j).....	$\left\{ \frac{5\pi}{14} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \frac{9\pi}{14} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$	8.8 f).....	$\left[-\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{2} \right] \cup \left[-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4} \right] \cup \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2} \right] \cup \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4} \right]$
8.8 a).....	$\left[0, \frac{3\pi}{4} \right] \cup \left[\frac{5\pi}{4}, 2\pi \right]$	8.8 g).....	$\left[0, \frac{3\pi}{4} \right] \cup \left[\frac{7\pi}{4}, 2\pi \right]$
8.8 a).....	$\left[-\frac{3\pi}{4}, \frac{3\pi}{4} \right]$	8.8 g).....	$\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4} \right]$
8.8 b).....	$\left[\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3} \right]$	8.8 h).....	$\left[0, \frac{3\pi}{8} \right] \cup \left[\frac{7\pi}{8}, \frac{11\pi}{8} \right] \cup \left[\frac{15\pi}{8}, 2\pi \right]$
8.8 b).....	$\left[-\pi, -\frac{\pi}{3} \right] \cup \left[\frac{\pi}{3}, \pi \right]$	8.8 h).....	$\left[-\pi, -\frac{5\pi}{8} \right] \cup \left[-\frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8} \right] \cup \left[\frac{7\pi}{8}, \pi \right]$
8.8 c).....	$\left[0, \frac{\pi}{6} \right] \cup \left[\frac{5\pi}{6}, 2\pi \right]$		

Corrigés

8.3 b) On peut utiliser $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$ puis les formules d'addition.

8.4 b) On a

$$\frac{\sin 2x}{\sin x} - \frac{\cos 2x}{\cos x} = \frac{\sin 2x \cos x - \cos 2x \sin x}{\sin x \cos x} = \frac{\sin(2x - x)}{\sin x \cos x} = \frac{1}{\cos x}.$$

On peut aussi faire cette simplification à l'aide des formules de duplication :

$$\frac{\sin 2x}{\sin x} - \frac{\cos 2x}{\cos x} = \frac{2 \sin x \cos x}{\sin x} - \frac{2 \cos^2 x - 1}{\cos x} = \frac{1}{\cos x}$$

8.4 d) On calcule

$$\begin{aligned} \cos(3x) &= \cos(2x + x) = \cos(2x) \cos x - \sin(2x) \sin x = (2 \cos^2 x - 1) \cos x - 2 \cos x \sin^2 x \\ &= 2 \cos^3 x - \cos x - 2 \cos x (1 - \cos^2 x) = 4 \cos^3 x - 3 \cos x. \end{aligned}$$

8.5 a) On a $\cos \frac{\pi}{4} = 2 \cos^2 \frac{\pi}{8} - 1$ donc $\cos^2 \frac{\pi}{8} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} + 1}{2} = \frac{\sqrt{2} + 2}{4}$. De plus, $\cos \frac{\pi}{8} \geq 0$ donc $\cos \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}$.

8.5 b) On a $\sin^2 \frac{\pi}{8} = 1 - \cos^2 \frac{\pi}{8} = \frac{2 - \sqrt{2}}{4}$ et $\sin \frac{\pi}{8} \geq 0$ donc $\sin \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}$.

8.6 a) On a $\cos(2x) = 1 - 2\sin^2 x$ donc $\frac{1 - \cos(2x)}{\sin(2x)} = \frac{2\sin^2 x}{2\sin x \cos x} = \tan x$.

8.6 b) On a $\frac{\sin 3x}{\sin x} - \frac{\cos 3x}{\cos x} = \frac{\sin 3x \cos x - \cos 3x \sin x}{\sin x \cos x} = \frac{\sin(3x - x)}{\sin x \cos x} = \frac{\sin(2x)}{\sin x} = \frac{2\sin x \cos x}{\sin x \cos x} = 2$.

8.6 c) On a $\cos(4x) = 2\cos^2(2x) - 1 = 2(2\cos^2 x - 1)^2 - 1 = 8\cos^4 x - 8\cos^2 x + 1$.

8.7 e) Cela revient à résoudre « $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ou $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ ».

8.7 g) Si on résout avec $x \in [0, 2\pi]$, alors $t = 2x \in [0, 4\pi]$.

Or, dans $[0, 4\pi]$, on a $\cos t = \frac{\sqrt{3}}{2}$ pour $t \in \left\{ \frac{\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}, \frac{13\pi}{6}, \frac{23\pi}{6} \right\}$ et donc pour $x \in \left\{ \frac{\pi}{12}, \frac{11\pi}{12}, \frac{13\pi}{12}, \frac{23\pi}{12} \right\}$.

8.7 h) $\sin x$ est solution de l'équation de degré 2 : $2t^2 + t - 1 = 0$ dont les solutions sont $t = -1$ et $t = \frac{1}{2}$. Ainsi, les x solutions sont les x tels que $\sin x = -1$ ou $\sin x = \frac{1}{2}$.

8.7 j) On a $\cos \frac{\pi}{7} = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{7}\right) = \sin \frac{5\pi}{14}$. Finalement, on résout $\sin x = \sin \frac{5\pi}{14}$.

8.8 d) Cela revient à résoudre $-\frac{1}{2} \leq \sin x \leq \frac{1}{2}$.

8.8 f) On résout « $\tan x \geq 1$ ou $\tan x \leq -1$ ».

8.8 g) Si $x \in [0, 2\pi]$, alors $t = x - \frac{\pi}{4} \in \left[-\frac{\pi}{4}, 2\pi - \frac{\pi}{4}\right]$. On résout donc $\cos t \geq 0$ pour $t \in \left[-\frac{\pi}{4}, 2\pi - \frac{\pi}{4}\right]$ ce qui donne $t \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{4}\right]$ et donc $x \in \left[0, \frac{3\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{7\pi}{4}, 2\pi\right]$.

8.8 h) Si $x \in [0, 2\pi]$, alors $t = 2x - \frac{\pi}{4} \in \left[-\frac{\pi}{4}, 4\pi - \frac{\pi}{4}\right]$. On résout donc $\cos t \geq 0$ pour $t \in \left[-\frac{\pi}{4}, 4\pi - \frac{\pi}{4}\right]$ ce qui donne $t \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{7\pi}{2}, \frac{15\pi}{2}\right]$ puis $x \in \left[0, \frac{3\pi}{8}\right] \cup \left[\frac{7\pi}{8}, \frac{11\pi}{8}\right] \cup \left[\frac{15\pi}{8}, 2\pi\right]$.

Fiche n° 9. Dérivation

Réponses

9.1 a) $6x^2 + 2x - 11$

9.1 b) $5x^4 - 6x^2 + 4x - 15$

9.1 c) $(2x^2 - 2x + 10) \exp(2x)$

9.1 d) $(6x - 1) \ln(x - 2) + \frac{3x^2 - x}{x - 2}$

9.2 a) $5(x^2 - 5x)^4(2x - 5)$

9.2 b) $4(2x^3 + 4x - 1)(3x^2 + 2)$

9.2 c) $8 \cos^2(x) - 6 \cos(x) \sin(x) - 4$

9.2 d) $-3(3 \cos(x) - \sin(x))^2(3 \sin(x) + \cos(x))$

9.3 a) $\frac{2x}{x^2 + 1}$

9.3 b) $\frac{1}{x \ln(x)}$

9.3 c) $(-2x^2 + 3x - 1) \exp(x^2 + x)$

9.3 d) $6 \cos(2x) \exp(3 \sin(2x))$

9.4 a) $\frac{6x}{(x^2 + 1)^2} \cos\left(\frac{2x^2 - 1}{x^2 + 1}\right)$

9.4 b) $\frac{2x^2 + 2x - 8}{(x^2 + 4)^2} \sin\left(\frac{2x + 1}{x^2 + 4}\right)$

9.4 c) $\frac{\cos(x)}{2\sqrt{\sin(x)}}$

9.4 d) $\frac{\cos(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}$

9.5 a) $\frac{(2x + 3)(2 \sin(x) + 3) - (x^2 + 3x) \times 2 \cos(x)}{(2 \sin(x) + 3)^2}$

9.5 b) $\frac{2 - 3x}{2\sqrt{x}(3x + 2)^2}$

9.5 c) $-2 \frac{(x^2 + 1) \sin(2x + 1) + x \cos(2x + 1)}{(x^2 + 1)^2}$

9.5 d) $\frac{(4x + 3) \ln(x) - 2x - 3}{(\ln(x))^2}$

9.6 a) $2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)$

9.6 b) $\frac{9}{(9 - x^2)\sqrt{9 - x^2}}$

9.6 c) $\frac{1}{1 - x^2}$

9.6 d) $\frac{x \cos(x) - \sin(x)}{x \sin(x)}$

9.7 a) $\frac{10x - 5}{(3 - x)^2(2 + x)^2}$

9.7 b) $\frac{2}{x + 1} \left(x + \frac{1 + \sqrt{3}}{2}\right) \left(x + \frac{1 - \sqrt{3}}{2}\right)$

9.7 c) $\frac{2x^2 + 2x + 5}{(x + 2)(x - 1)^2}$

9.7 d) $\frac{x^2}{(x + 1)^2}$

9.7 e) $\frac{2}{x(1 - \ln(x))^2}$

Corrigés

9.1 a) On calcule : $f'(x) = (2x + 3)(2x - 5) + (x^2 + 3x + 2) \times 2 = 6x^2 + 2x - 11$.

9.1 b) On calcule : $f'(x) = (3x^2 + 3)(x^2 - 5) + (x^3 + 3x + 2) \times 2x = 5x^4 - 6x^2 + 4x - 15$.

9.1 c) On calcule : $f'(x) = (2x - 2) \exp(2x) + (x^2 - 2x + 6) \times 2 \exp(2x) = (2x^2 - 2x + 10) \exp(2x)$.

9.1 d) On calcule : $f'(x) = (6x - 1) \ln(x - 2) + (3x^2 - x) \times \frac{1}{x - 2} = (6x - 1) \ln(x - 2) + \frac{3x^2 - x}{x - 2}$.

9.2 a) On calcule : $f'(x) = 5(x^2 - 5x)^4(2x - 5)$.

9.2 b) On calcule : $f'(x) = 2(2x^3 + 4x - 1)(6x^2 + 4) = 4(2x^3 + 4x - 1)(3x^2 + 2)$.

9.2 c) On calcule :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2(\sin(x) + 2\cos(x))(\cos(x) - 2\sin(x)) = 2(\sin(x)\cos(x) - 2\sin^2(x) + 2\cos^2(x) - 4\cos(x)\sin(x)) \\ &= -6\cos(x)\sin(x) - 4\sin^2(x) + 4\cos^2(x) = -6\cos(x)\sin(x) - 4(1 - \cos^2(x)) + 4\cos^2(x) \\ &= 8\cos^2(x) - 6\cos(x)\sin(x) - 4. \end{aligned}$$

9.2 d) On calcule : $f'(x) = 3(3\cos(x) - \sin(x))^2(-3\sin(x) - \cos(x)) = -3(3\cos(x) - \sin(x))^2(3\sin(x) + \cos(x))$.

En développant, on trouve : $f'(x) = -54\cos^2(x)\sin(x) - 78\cos^3(x) - 9\sin(x) + 51\cos(x)$.

9.3 a) On calcule : $f'(x) = \frac{2x}{x^2+1}$. C'est une application directe de la formule de dérivation quand $f = \ln \circ u$.

9.3 b) On calcule : $f'(x) = \frac{1/x}{\ln(x)} = \frac{1}{x\ln(x)}$.

9.3 c) On calcule :

$$\begin{aligned} f'(x) &= (-1)\exp(x^2 + x) + (2 - x)\exp(x^2 + x) \times (2x + 1) = (-1 + (2 - x)(2x + 1))\exp(x^2 + x) \\ &= (-1 + 4x + 2 - 2x^2 - x)\exp(x^2 + x) = (-2x^2 + 3x - 1)\exp(x^2 + x). \end{aligned}$$

9.3 d) On calcule : $f'(x) = \exp(3\sin(2x))(3 \times 2\cos(2x)) = 6\cos(2x)\exp(3\sin(2x))$.

9.4 a) On calcule :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \cos\left(\frac{2x^2 - 1}{x^2 + 1}\right) \times \frac{4x(x^2 + 1) - (2x^2 - 1) \times 2x}{(x^2 + 1)^2} = \cos\left(\frac{2x^2 - 1}{x^2 + 1}\right) \frac{4x^3 + 4x - 4x^3 + 2x}{(x^2 + 1)^2} \\ &= \frac{6x}{(x^2 + 1)^2} \cos\left(\frac{2x^2 - 1}{x^2 + 1}\right). \end{aligned}$$

9.4 b) On calcule :

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\sin\left(\frac{2x+1}{x^2+4}\right) \times \frac{2(x^2+4) - (2x+1) \times 2x}{(x^2+4)^2} = -\sin\left(\frac{2x+1}{x^2+4}\right) \times \frac{2x^2+8-4x^2-2x}{(x^2+4)^2} \\ &= \frac{2x^2+2x-8}{(x^2+4)^2} \sin\left(\frac{2x+1}{x^2+4}\right). \end{aligned}$$

9.4 c) On calcule : $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\sin(x)}} \cos(x) = \frac{\cos(x)}{2\sqrt{\sin(x)}}$.

9.4 d) On calcule : $f'(x) = \cos(\sqrt{x}) \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{\cos(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}$.

9.5 a) On calcule : $f'(x) = \frac{(2x+3)(2\sin(x)+3) - (x^2+3x) \times 2\cos(x)}{(2\sin(x)+3)^2}$. En développant le numérateur, on trouve

$$f'(x) = \frac{-2x^2\cos(x) + 4x\sin(x) - 6x\cos(x) + 6\sin(x) + 6x + 9}{(2\sin(x)+3)^2}.$$

9.5 b) On calcule : $f'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(3x+2) - \sqrt{x} \times 3}{(3x+2)^2} = \frac{\frac{3x+2}{2\sqrt{x}} - \frac{3\sqrt{x} \times 2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}}{(3x+2)^2} = \frac{3x+2-6x}{2\sqrt{x}(3x+2)^2} = \frac{2-3x}{2\sqrt{x}(3x+2)^2}$

9.5 c) On calcule : $f'(x) = \frac{-2\sin(2x+1) \times (x^2+1) - \cos(2x+1) \times 2x}{(x^2+1)^2} = -2 \frac{(x^2+1)\sin(2x+1) + x\cos(2x+1)}{(x^2+1)^2}$.

9.5 d) On calcule : $f'(x) = \frac{(4x+3)\ln(x) - (2x^2+3x)\frac{1}{x}}{(\ln(x))^2} = \frac{(4x+3)\ln(x) - 2x - 3}{(\ln(x))^2}$

9.6 a) On calcule : $f'(x) = 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) + x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) = 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)$

9.6 b) On calcule : $f'(x) = \frac{\sqrt{9-x^2} - x \frac{1}{2\sqrt{9-x^2}}(-2x)}{\sqrt{9-x^2}^2} = \frac{\sqrt{9-x^2} + \frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}}}{9-x^2} = \frac{\frac{9-x^2+x^2}{\sqrt{9-x^2}}}{9-x^2} = \frac{9}{(9-x^2)\sqrt{9-x^2}}$

9.6 c) On a trois fonctions composées à la suite : $f = \ln(\sqrt{u})$. Donc on a, en appliquant deux fois la formule de dérivée d'une fonction composée : $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{u-x}} \times u'(x) \times \frac{1}{\sqrt{u(x)}}$.

On calcule :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}} \times \frac{1(x-1) - (x+1) \times 1}{(x-1)^2} \times \frac{1}{\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}} \\ &= \frac{1}{2 \times \frac{x+1}{x-1}} \times \frac{-2}{(x-1)^2} = \frac{-1}{(x+1)(x-1)} \\ &= \frac{-1}{x^2-1} = \frac{1}{1-x^2}. \end{aligned}$$

9.6 d) On calcule : $f'(x) = \frac{\cos(x) \times x - \sin(x) \times 1}{x^2} \times \frac{x}{\sin(x)} = \frac{x \cos(x) - \sin(x)}{x \sin(x)}$.

9.7 a) On calcule : $f'(x) = \frac{-(-1)}{(3-x)^2} + \frac{-1}{(2+x)^2} = \frac{(2+x)^2 - (3-x)^2}{(3-x)^2(2+x)^2} = \frac{10x-5}{(3-x)^2(2+x)^2}$.

9.7 b) On calcule : $f'(x) = 2x - \frac{1}{x+1} = \frac{2x(x+1) - 1}{x+1} = \frac{2x^2+2x-1}{x+1}$.

Pour le trinôme $2x^2 + 2x - 1$, on calcule $\Delta = 4 - 4 \times 2 \times (-1) = 12$. On a deux racines :

$$x_1 = \frac{-2 - \sqrt{12}}{2 \times 2} = \frac{-2 - 2\sqrt{3}}{4} = \frac{-1 - \sqrt{3}}{2} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-1 + \sqrt{3}}{2}.$$

Enfin, on a $f'(x) = \frac{2(x - \frac{-1-\sqrt{3}}{2})(x - \frac{-1+\sqrt{3}}{2})}{x+1} = \frac{2}{x+1} \left(x + \frac{1+\sqrt{3}}{2}\right) \left(x + \frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)$.

9.7 c) On calcule : $f'(x) = \frac{2x+1}{x^2+x+2} - \frac{1 \times (x-1) - (x+2) \times 1}{(x-1)^2} = \frac{2x+1}{x^2+x-2} + \frac{3}{(x-1)^2}$.

On cherche les racines du trinôme $x^2 + x - 2$ dont le discriminant est $\Delta = 1 + 8 = 9$; on identifie deux racines $x_1 = -2$, $x_2 = 1$. D'où la forme factorisée : $x^2 + x - 2 = (x+2)(x-1)$.

Alors : $f'(x) = \frac{2x+1}{(x+2)(x-1)} + \frac{3}{(x-1)^2} = \frac{(2x+1)(x-1)}{(x+2)(x-1)^2} + \frac{3(x+2)}{(x+2)(x-1)^2} = \frac{2x^2+2x+5}{(x+2)(x-1)^2}$.

Le trinôme $2x^2 + 2x + 5$ dont le discriminant est $\Delta = 4 - 4 \times 2 \times 5 = -36 < 0$ ne se factorise pas dans $\mathbb{R}$.

On a : $f'(x) = \frac{2x^2+2x+5}{(x+2)(x-1)^2}$.

9.7 d) On calcule :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1 \times (x+1) - x \times 1}{(x+1)^2} + 1 - 2 \frac{1}{x+1} = \frac{1}{(x+1)^2} + 1 - \frac{2}{x+1} = \frac{1 + (x+1)^2 - 2(x+1)}{(x+1)^2} \\ &= \frac{1 + x^2 + 2x + 1 - 2x - 2}{(x+1)^2} = \frac{x^2}{(x+1)^2}. \end{aligned}$$

9.7 e) On calcule : $f'(x) = \frac{\frac{1}{x}(1 - \ln(x)) - (1 + \ln(x))\frac{-1}{x}}{(1 - \ln(x))^2} = \frac{\frac{1}{x} - \frac{\ln(x)}{x} + \frac{1}{x} + \frac{\ln(x)}{x}}{(1 - \ln(x))^2} = \frac{\frac{2}{x}}{(1 - \ln(x))^2} = \frac{2}{x(1 - \ln(x))^2}$.

Fiche n° 10. Primitives

Réponses

10.1 a)	$\ln t + 1 $	10.5 d)	$-\ln 1 - \sin t $
10.1 b)	$-\frac{3}{t+2}$	10.5 e)	$-2 \cos \sqrt{t}$
10.1 c)	$-\frac{3}{2(t+2)^2}$	10.5 f)	$\frac{1}{\pi} \sin(\pi \ln t)$
10.1 d)	$-\frac{\cos(4t)}{4}$	10.5 g)	$\tan t - t$
10.2 a)	$\frac{2}{3}(1+t)^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{4}t^{\frac{4}{3}}$	10.5 h)	$\frac{1}{2} \tan^2 t + \ln \cos t $
10.2 b)	$\frac{1}{2}e^{2t+1}$	10.5 i)	$\frac{1}{4} \tan^4 t$
10.2 c)	$\frac{1}{3} \operatorname{Arctan}(3t)$	10.5 j)	$2\sqrt{\tan t}$
10.3 a)	$\frac{2}{3} \ln 1 + t^3 $	10.5 k)	$-\frac{1}{\tan t}$
10.3 b)	$\frac{1}{6}(1+2t^2)^{\frac{3}{2}}$	10.5 l)	$\frac{1}{2} \frac{1}{(1 - \sin t)^2}$
10.3 c)	$-\sqrt{1-t^2}$	10.5 m)	$\frac{1}{2} \operatorname{Arctan}(2t)$
10.3 d)	$\frac{3}{4}(1+7t^2)^{\frac{2}{3}}$	10.5 n)	$\operatorname{Arctan}(e^t)$
10.3 e)	$\frac{1}{6} \ln(1+3t^2)$	10.6 a)	$\frac{t}{2} + \frac{\sin(2t)}{4}$
10.3 f)	$-\frac{1}{(1+3t^2)^2}$	10.6 b)	$-\frac{\cos(4t)}{8} - \frac{\cos(2t)}{4}$
10.4 a)	$\frac{1}{4} \ln^4 t$	10.6 c)	$-\cos t + \frac{1}{3} \cos^3 t$
10.4 b)	$2\sqrt{\ln t}$	10.6 d)	$\ln(1 + \sin^2 t)$
10.4 c)	$\frac{2}{(3 - e^{2t})^2}$	10.6 e)	$\ln \tan t $
10.4 d)	$-\frac{2}{3t^{\frac{3}{2}}}$	10.6 f)	$-\cot t + \tan t$
10.4 e)	$\ln 1 - e^{-t} + e^t $	10.6 g)	$\frac{1}{4} \ln \tan 2t $
10.4 f)	$-e^{\frac{1}{t}}$	10.7 a)	$t + \ln t - \frac{1}{t}$
10.5 a)	$-\frac{1}{3} \cos^3 t$	10.7 b)	$\ln t - \frac{1}{2t^2}$
10.5 b)	$e^{\sin t}$	10.7 c)	$t + \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5}$
10.5 c)	$-\ln \cos t $	10.7 d)	$t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3}$
		10.7 e)	$t - 2 \ln t + 1 $

10.7 f).....	$t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \ln t+1 $	10.8 i).....	$\cos t(3\cos^2 t - 2)$ puis $-\frac{1}{3}\cos^3 t$
10.7 g).....	$\frac{1}{2}\ln(1+t^2) - \text{Arctan}(t)$	10.8 j).....	$-\frac{2t\sin\frac{1}{t} + \cos\frac{1}{t}}{t^4}$ puis $\cos\frac{1}{t}$
10.7 h).....	$\ln t+1 + \frac{1}{t+1}$	10.8 k).....	$\frac{2e^t}{(2+e^t)^2}$ puis $\ln(2+e^t)$
10.8 a).....	$2(t-1)$ puis $\frac{1}{3}t^3 - t^2 + 5t$	10.8 l).....	$\frac{2\cos t + 3}{(2+3\cos t)^2}$ puis $-\frac{1}{3}\ln 2+3\cos t $
10.8 b).....	$-\frac{1}{t^2}\left(\frac{2}{t} + 1\right)$ puis $-\frac{1}{t} + \ln t $	10.8 m).....	$\frac{1}{(1-t^2)^{3/2}}$ puis $-\sqrt{1-t^2}$
10.8 c).....	$\frac{1}{2\sqrt{t}} + \frac{3}{t^4}$ puis $\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2t^2}$	10.8 n).....	$2\frac{3\cos^2 t - 1}{(1+\cos^2 t)^2}$ puis $-\ln(1+\cos^2(t))$
10.8 d).....	$-\frac{4}{t^5} - \frac{3}{2}t^{-5/2}$ puis $-\frac{1}{3}t^{-3} - \frac{2}{\sqrt{t}}$	10.8 o).....	$(1-2t^2)e^{-t^2}$ puis $-\frac{1}{2}e^{-t^2}$
10.8 e).....	$2e^{2t} - 3e^{-3t}$ puis $\frac{1}{2}e^{2t} - \frac{1}{3}e^{-3t}$	10.8 p).....	$\frac{\ln t - 2}{t^2}$ puis $\ln t - \frac{1}{2}\ln^2 t$
10.8 f).....	$3e^{3t-2}$ puis $\frac{1}{3}e^{3t-2}$	10.8 q).....	$-\frac{1+\ln t}{t^2\ln^2 t}$ puis $\ln \ln t $
10.8 g).....	$-\frac{t(t^3+2)}{(t-1)^2(t^2+t+1)^2}$ puis $\frac{1}{3}\ln(t^3-1)$	10.8 r).....	$\frac{\cos\ln t - \sin\ln t}{t^2}$ puis $-\cos(\ln t)$
10.8 h) ..	$-\frac{3t^2-2t-3}{(t^2+1)^2}$ puis $\frac{3}{2}\ln(t^2+1) - \text{Arctan}(t)$	10.8 s).....	$-\frac{e^t(e^{2t}-1)}{(1+e^{2t})^2}$ puis $\text{Arctan}(e^t)$

Corrigés

10.1 a) Admet des primitives sur $] -\infty, -1[$ ou $] -1, +\infty[$.

10.1 b) Admet des primitives sur $] -\infty, -2[$ ou $] -2, +\infty[$.

10.1 c) Admet des primitives sur $] -\infty, -2[$ ou $] -2, +\infty[$.

10.1 d) Admet des primitives sur $\mathbb{R}$.

10.2 a) Admet des primitives sur $]0, +\infty[$.

10.2 b) Admet des primitives sur $\mathbb{R}$.

10.2 c) Admet des primitives sur $\mathbb{R}$.

10.5 g) $\int^t \tan^2 \theta \, d\theta = \int^t ((1 + \tan^2 \theta) - 1) \, d\theta = \tan t - t + \text{cte}$

10.5 h) $\int^t \tan^3 \theta \, d\theta = \int^t ((\tan^2 \theta + 1) \tan \theta - \tan \theta) \, d\theta = \frac{1}{2} \tan^2 t + \ln|\cos t| + \text{cte}$

10.6 a) $\int^x \cos^2 \theta \, d\theta = \int^t \frac{1 + \cos(2\theta)}{2} \, d\theta = \frac{t}{2} + \frac{\sin(2t)}{4} + \text{cte}$

10.6 b) On a

$$\begin{aligned} \int^t \cos(\theta) \sin(3\theta) \, d\theta &= \int^t \frac{1}{2} (\sin(3\theta + \theta) + \sin(3\theta - \theta)) \, d\theta \\ &= \int^t \frac{1}{2} (\sin(4\theta) + \sin(2\theta)) \, d\theta = -\frac{\cos(4t)}{8} - \frac{\cos(2t)}{4} + \text{cte}. \end{aligned}$$

10.6 c) $\int^t \sin^3 \theta \, d\theta = \int^t (1 - \cos^2 \theta) \sin \theta \, d\theta = -\cos t + \frac{1}{3} \cos^3 t + \text{cte}$

10.6 d) $\int^t \frac{\sin(2\theta)}{1 + \sin^2 \theta} \, d\theta = \int^t \frac{2 \sin \theta \cos \theta}{1 + \sin^2 \theta} \, d\theta = \ln(1 + \sin^2 t) + \text{cte}$

10.6 e) $\int^t \frac{d\theta}{\sin \theta \cos \theta} = \int^t \frac{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta}{\sin \theta \cos \theta} \, d\theta = \int^t \left(\frac{\cos \theta}{\sin \theta} + \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \right) \, d\theta = \ln |\sin t| - \ln |\cos t| + \text{cte} = \ln |\tan t| + \text{cte}$

10.6 f) $\int^t \frac{d\theta}{\sin^2(\theta) \cos^2(\theta)} = \int^t \frac{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta}{\sin^2(\theta) \cos^2(\theta)} \, d\theta = \int^t \left(\frac{1}{\sin^2 \theta} + \frac{1}{\cos^2 \theta} \right) \, d\theta = -\cotan(t) + \tan(t) + \text{cte}$

10.6 g) On a

$$\begin{aligned} \int^t \frac{d\theta}{\sin(4\theta)} &= \int^t \frac{\cos^2(2\theta) + \sin^2(2\theta)}{2 \sin(2\theta) \cos(2\theta)} \, d\theta \\ &= \int^t \frac{1}{4} \left(\frac{2 \cos(2\theta)}{\sin(2\theta)} + \frac{2 \sin(2\theta)}{\cos(2\theta)} \right) \, d\theta = \frac{1}{4} \ln |\sin(2t)| - \frac{1}{4} \ln |\cos(2t)| + \text{cte} = \frac{1}{4} \ln |\tan 2t| + \text{cte}. \end{aligned}$$

10.7 c) On a $1 - t^6 = 1^3 - (t^2)^3 = (1 - t^2)(1 + t^2 + t^4)$ donc finalement on cherche une primitive de $1 + t^2 + t^4$.

10.7 e) $\int^t \frac{\theta - 1}{\theta + 1} \, d\theta = \int^t \frac{\theta + 1 - 2}{\theta + 1} \, d\theta = \int^t \left(1 - \frac{2}{\theta + 1} \right) \, d\theta = t - 2 \ln |t + 1| + \text{cte}$

10.7 f) $\int^t \frac{\theta^3}{\theta + 1} \, d\theta = \int^t \frac{\theta^3 + 1 - 1}{\theta + 1} \, d\theta = \int^t \frac{(\theta + 1)(1 - \theta + \theta^2) - 1}{\theta + 1} \, d\theta = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \ln |t + 1| + \text{cte}$

10.7 h) $\int^t \frac{\theta}{(\theta + 1)^2} \, d\theta = \int^t \frac{\theta + 1 - 1}{(\theta + 1)^2} \, d\theta = \int^t \left(\frac{1}{\theta + 1} - \frac{1}{(\theta + 1)^2} \right) \, d\theta = \ln |t + 1| + \frac{1}{t + 1} + \text{cte}$

Fiche n° 11. Calcul d'intégrales

Réponses

11.1 a).....	Positif	11.3 e).....	$-\frac{1}{30}$	11.5 d).....	$\frac{\sqrt{2}}{6}$	11.7 b).....	$\frac{17}{2}$
11.1 b).....	Négatif	11.3 f).....	$-\frac{2}{101}$	11.5 e).....	6	11.7 c).....	e^2
11.1 c).....	Positif	11.4 a).....	0	11.5 f).....	$\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}$	11.7 d).....	$3e - 4$
11.2 a).....	14	11.4 b).....	1	11.6 a).....	0	11.7 e).....	$-\frac{1}{3}$
11.2 b).....	50	11.4 c).....	$\frac{1}{2}$	11.6 b).....	0	11.7 f).....	$\frac{5}{8}$
11.2 c).....	$\frac{147}{2}$	11.4 d).....	18	11.6 c).....	$\ln\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$	11.8 a).....	$\frac{\pi}{4}$
11.2 d).....	-54	11.4 e).....	$e^2 - e^{-3}$	11.6 d).....	$\frac{1}{384}$	11.8 b).....	$\frac{99}{\ln 10}$
11.2 e).....	0	11.4 f).....	$-\ln 3$	11.6 e)...	$\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{e}\right)$	11.8 c).....	$\frac{2}{3}$
11.2 f).....	$\frac{5}{2}$	11.5 a).....	78	11.6 f).....	$\frac{7}{48}$	11.8 d).....	$\frac{2\pi}{9}$
11.3 a).....	8	11.5 b).....	$2(e^3 - 1)$	11.7 a)....	$\frac{1}{2} - \frac{1}{e+1}$		
11.3 b).....	-2	11.5 c) .	$\frac{1}{\pi} \ln\left(1 + \frac{\pi}{2}\right)$				
11.3 c).....	$\frac{8}{3}$						
11.3 d).....	0						

Corrigés

11.1 a) On intègre une fonction positive et les bornes sont « dans le bon sens ».

11.1 b) $\int_5^{-3} |\sin 7x| dx = -\int_{-3}^5 |\sin 7x| dx$. Cette dernière intégrale a ses bornes « dans le bon sens », on peut l'interpréter comme une aire. Elle est positive car on intègre une fonction positive.

11.1 c) $\int_0^{-1} \sin x dx = -\int_{-1}^0 \sin x dx$. Cette dernière intégrale a ses bornes « dans le bon sens », on peut l'interpréter comme une aire. $\sin$ est négative sur $[-\pi, 0]$ donc sur $[-1, 0]$, $\int_{-1}^0 \sin x dx$ est donc négative.

11.2 a) Il s'agit de l'aire d'un rectangle de largeur 2 et de longueur 7.

11.2 b) On commence par mettre les bornes « dans le bon sens » : $\int_7^{-3} -5 dx = -\int_{-3}^7 -5 dx = \int_{-3}^7 5 dx$. Cette dernière intégrale est l'aire d'un rectangle dont les côtés mesurent 10 et 5.

11.2 c) Il s'agit de l'aire du triangle dont les sommets sont l'origine O , le point $A(7; 0)$ et $B(7; 21)$. Ce triangle est rectangle en A et son aire est $\frac{1}{2} \times AO \times AB$.

11.2 d) Les bornes sont « dans le bon sens », on peut donc interpréter l'intégrale comme une aire algébrique. Sur l'intervalle $[2, 8]$, la courbe de $f(x) = 1 - 2x$ est située sous l'axe des abscisses, l'aire algébrique sera négative.

Il s'agit de calculer l'aire du trapèze rectangle dont les sommets sont $A(2;0)$, $B(8;0)$, $C(8;-15)$ et $D(2;-3)$. L'aire de ce trapèze rectangle est $\frac{1}{2} \times AB \times (AD + BC) = \frac{1}{2} \times 6 \times (3 + 15)$.

11.2 e) Avec la relation de Chasles, on a $\int_{-2}^2 \sin x \, dx = \int_{-2}^0 \sin x \, dx + \int_0^2 \sin x \, dx$. La fonction sinus étant impaire, les aires algébriques $\int_{-2}^0 \sin x \, dx$ et $\int_0^2 \sin x \, dx$ sont opposées, il suit que leur somme est nulle.

11.2 f) Les bornes étant « dans le bon sens », on interprète cette intégrale comme une aire algébrique. Cette aire est composée de deux triangles rectangles (les intégrales de -2 à 0 et de 0 à 1).

11.3 a) Les bornes étant « dans le bon sens », on interprète cette intégrale comme une aire algébrique d'un rectangle.

11.3 b)
$$\int_1^3 2x - 5 \, dx = \left[x^2 - 5x \right]_1^3 = (3^2 - 15) - (1^2 - 5) = -2.$$

11.3 c)
$$\int_{-2}^0 x^2 + x + 1 \, dx = \left[\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x \right]_{-2}^0 = 0 - \left(\frac{1}{3}(-2)^3 + \frac{1}{2}(-2)^2 - 2 \right) = \frac{8}{3}.$$

11.3 d) La fonction intégrée est impaire, son intégrale sur un segment symétrique par rapport à 0 est donc nulle.

11.3 e)
$$\int_0^1 x^5 - x^4 \, dx = \left[\frac{1}{6}x^6 - \frac{1}{5}x^5 \right]_0^1 = \frac{1}{6} - \frac{1}{5} = -\frac{1}{30}.$$

11.3 f)
$$\int_1^{-1} x^{100} \, dx = \left[\frac{1}{101}x^{101} \right]_1^{-1} = -\frac{2}{101}.$$

11.4 a) La fonction intégrée est impaire, son intégrale sur un segment symétrique par rapport à 0 est donc nulle.

11.4 b)
$$\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \cos x \, dx = \left[\sin x \right]_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} = 2 \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = 1.$$

11.4 c)
$$\int_1^2 \frac{dx}{x^2} = \left[-\frac{1}{x} \right]_1^2 = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}.$$

11.4 d)
$$\int_1^{100} \frac{1}{\sqrt{x}} \, dx = \left[2\sqrt{x} \right]_1^{100} = 18.$$

11.4 e)
$$\int_{-3}^2 e^x \, dx = \left[e^x \right]_{-3}^2 = e^2 - e^{-3}.$$

11.4 f)
$$\int_{-3}^{-1} \frac{dx}{x} = \left[\ln|x| \right]_{-3}^{-1} = -\ln 3.$$

11.5 a)
$$\int_{-1}^2 (2x+1)^3 \, dx = \left[\frac{1}{8}(2x+1)^4 \right]_{-1}^2 = \frac{625}{8} - \frac{1}{8} = 78.$$

11.5 b)
$$\int_{-2}^4 e^{\frac{1}{2}x+1} \, dx = \left[2e^{\frac{1}{2}x+1} \right]_{-2}^4 = 2(e^3 - 1).$$

11.5 c)
$$\int_0^1 \frac{dx}{\pi x + 2} = \left[\frac{1}{\pi} \ln|\pi x + 2| \right]_0^1 = \frac{1}{\pi} \ln\left(\frac{\pi+2}{2}\right).$$

11.5 d)
$$\int_{-\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{6}} \sin(3x) \, dx = \left[-\frac{1}{3} \cos(3x) \right]_{-\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{6}} = \frac{1}{3} \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

11.5 e) $\int_0^{33} \frac{1}{\sqrt{3x+1}} dx = \left[\frac{2}{3} \sqrt{3x+1} \right]_0^{33} = \frac{2}{3}(10-1) = 6.$

11.5 f) $\int_{-\pi}^{\frac{\pi}{2}} \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right) dx = \left[-\sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right) \right]_{-\pi}^{\frac{\pi}{2}} = -\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) + \sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}.$

11.6 a) $\int_1^3 \frac{x-2}{x^2-4x+5} dx = \left[\frac{1}{2} \ln(x^2-4x+5) \right]_1^3 = 0.$

11.6 b) La fonction intégrée est impaire, son intégrale sur un segment symétrique par rapport à 0 est donc nulle.

11.6 c) $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \tan x dx = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sin x}{\cos x} x dx = \left[-\ln(\cos x) \right]_0^{\frac{\pi}{6}} = -\ln\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$

11.6 d) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}} \sin x (\cos x)^5 dx = \left[-\frac{1}{6} (\cos x)^6 \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}} = -\frac{1}{6} \left(\frac{1}{2} \right)^6.$

11.6 e) $\int_0^1 x e^{x^2-1} dx = \left[\frac{1}{2} e^{x^2-1} \right]_0^1 = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{e} \right).$

11.6 f) $\int_0^1 \frac{x}{(x^2+1)^4} dx = \left[\frac{1}{2} \frac{1}{3} \frac{1}{(x^2+1)^3} \right]_0^1 = \frac{7}{48}.$

11.7 a) $\int_0^1 \frac{e^x}{e^{2x}+2e^x+1} dx = \int_0^1 \frac{e^x}{(e^x+1)^2} dx = \left[-\frac{1}{e^x+1} \right]_0^1 = -\frac{1}{e+1} + \frac{1}{2}.$

11.7 b) $x+1$ est négatif sur $[-2, -1]$ et positif sur $[-1, 3]$. On en déduit : $\int_{-2}^3 |x+1| dx = \int_{-2}^{-1} -x-1 dx + \int_{-1}^3 x+1 dx$. Ces deux intégrales se calculent avec des primitives ou en les interprétant comme des aires de triangles.

11.7 c) $\int_{-1}^2 \max(1, e^x) dx = \int_{-1}^0 dx + \int_0^2 e^x dx = e^2.$

11.7 d) $\int_1^e \frac{3x-2\ln x}{x} dx = 3 \int_1^e dx - 2 \int_1^e \frac{\ln x}{x} dx = 3(e-1) - 2 \left[\frac{1}{2} (\ln x)^2 \right]_1^e = 3e-4.$

11.7 e) On calcule

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2x) \sin(x) dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2\cos^2(x) - 1) \sin(x) dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(x) \sin(x) dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x) dx \\ &= -\frac{2}{3} \left[\cos^3(x) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \left[\cos(x) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{3}. \end{aligned}$$

11.7 f) $\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{4}} |\cos x \sin x| dx = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{4}} \left| \frac{1}{2} \sin(2x) \right| dx = \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{4}} |\sin(2x)| dx$. Le signe de $\sin(2x)$ est négatif sur $\left[-\frac{\pi}{3}, 0\right]$ et positif sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, il suit que

$$\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{4}} |\sin(2x)| dx = \int_{-\frac{\pi}{3}}^0 -\sin(2x) dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(2x) dx = \frac{1}{2} \left[\cos(2x) \right]_{-\frac{\pi}{3}}^0 - \frac{1}{2} \left[\cos(2x) \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{5}{4}.$$

11.8 a) $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = \left[\operatorname{Arctan}(x) \right]_0^1 = \frac{\pi}{4}.$

11.8 b) $\int_0^2 10^x dx = \int_0^2 e^{x \ln 10} dx = \left[\frac{1}{\ln 10} e^{x \ln 10} \right]_0^2 = \frac{e^{2 \ln 10} - 1}{\ln 10} = \frac{99}{\ln 10}.$

11.8 c) $\int_0^1 \sqrt{x} dx = \int_0^1 x^{\frac{1}{2}} dx = \left[\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 = \frac{2}{3}.$

11.8 d) $\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \frac{2}{1+9x^2} dx = 2 \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \frac{1}{1+(3x)^2} dx = 2 \left[\frac{1}{3} \operatorname{Arctan}(3x) \right]_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{2}{3} \operatorname{Arctan}(\sqrt{3}) = \frac{2\pi}{9}.$

Fiche n° 12. Intégration par parties

Réponses

12.1 a) $\frac{\pi}{2} - 1$

12.1 b) 4

12.1 c) $\frac{(\ln(2))^2 2^{\ln(2)} - 2 \ln(2) - 2^{\ln(2)} + 2}{(\ln(2))^2}$

12.1 d) 1

12.1 e) $2 \ln 2 - \frac{3}{4}$

12.1 f) $\ln(2) - 2 + \frac{\pi}{2}$

12.1 g) $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$

12.1 h) $-\frac{2\sqrt{2}}{3} + \frac{4}{3}$

12.1 i) $\frac{4}{3}\sqrt{2}\ln(2) - \frac{8}{9}\sqrt{2} + \frac{4}{9}$

12.1 j) $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{\pi^2}{32}$

12.2 a) $\begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto (-x+2)e^x \end{cases}$

12.2 b) $\begin{cases} \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto -\frac{1+\ln x}{x} \end{cases}$

12.2 c) $\begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x \arctan(x) - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) \end{cases}$

12.3 a) $\frac{5}{2} - e^2$

12.3 b) $\frac{e^{\frac{\pi}{2}} + 1}{2}$

12.4 a) $\begin{cases} \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x \ln^2 x - 2x \ln x + 2x \end{cases}$

12.4 b) $\begin{cases} \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x^3 \left(\frac{1}{3} \ln^2 x - \frac{2}{9} \ln x + \frac{2}{27} \right) \end{cases}$

Corrigés

12.1 a) On choisit $u'(t) = \cos t$ et $v(t) = t$. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} t \cos t \, dt = [t \sin t]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \, dt = \frac{\pi}{2} - 1$.

12.1 b) On choisit $v(t) = t$ et $u'(t) = e^{\frac{t}{2}}$. $\int_0^2 t e^{\frac{t}{2}} \, dt = \left[2t e^{\frac{t}{2}} \right]_0^2 - 2 \int_0^2 e^{\frac{t}{2}} \, dt = 4e - 4 \left[e^{\frac{t}{2}} \right]_0^2 = 4$.

12.1 c) On choisit $v(t) = t$ et $u'(t) = 2^t$. $\int_1^{\ln(2)} t 2^t \, dt = \int_1^{\ln(2)} t e^{t \ln(2)} \, dt = \left[t \frac{1}{\ln(2)} 2^t \right]_1^{\ln(2)} - \frac{1}{\ln(2)} \int_1^{\ln(2)} e^{t \ln(2)} \, dt = 2^{\ln(2)} - \frac{2}{\ln(2)} - \frac{1}{(\ln(2))^2} [2^t]_1^{\ln(2)} = \frac{(\ln(2))^2 2^{\ln(2)} - 2 \ln(2) - 2^{\ln(2)} + 2}{(\ln(2))^2}$.

12.1 d) On choisit $u'(t) = 1$ et $v(t) = \ln t$. $\int_1^e \ln t \, dt = [t \ln t]_1^e - \int_1^e 1 \, dt = e - (e - 1) = 1$.

12.1 e) On choisit $u'(t) = t$ et $v(t) = \ln t$. $\int_1^2 t \ln t \, dt = \left[\frac{1}{2} t^2 \ln t \right]_1^2 - \int_1^2 \frac{1}{2} t \, dt = 2 \ln 2 - \frac{1}{4} [t^2]_1^2 = 2 \ln 2 - \frac{3}{4}$.

12.1 f) On choisit $u'(t) = 1$ et $v(t) = \ln(1+t^2)$. $\int_0^1 \ln(1+t^2) \, dt = [t \ln(1+t^2)]_0^1 - 2 \int_0^1 \frac{t^2}{1+t^2} \, dt = \ln(2) - 2 \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+t^2} \right) \, dt = \ln 2 - 2[t - \arctan(t)]_0^1 = \ln(2) - 2 + \frac{\pi}{2}$.

12.1 g) On choisit $u'(t) = t$ et $v(t) = \arctan t$. On a

$$\int_0^1 t \arctan t \, dt = \left[\frac{t^2}{2} \arctan t \right]_0^1 - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{t^2}{1+t^2} \, dt = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+t^2} \right) \, dt = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}.$$

12.1 h) On choisit $u'(t) = \frac{1}{\sqrt{1+t}}$ et $v(t) = t$. $\int_0^1 \frac{t}{\sqrt{1+t}} dt = [2t\sqrt{1+t}]_0^1 - 2 \int_0^1 \sqrt{1+t} dt = 2\sqrt{2} - \frac{4}{3} \left[(1+t)^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 = -\frac{2\sqrt{2}}{3} + \frac{4}{3}$.

12.1 i) On choisit $u'(t) = \sqrt{1+t}$ et $v(t) = \ln(1+t)$. $\int_0^1 \sqrt{1+t} \ln(1+t) dt = \left[\frac{2}{3} (1+t)^{\frac{3}{2}} \ln(1+t) \right]_0^1 - \frac{2}{3} \int_0^1 \sqrt{1+t} dt = \frac{4}{3} \sqrt{2} \ln(2) - \frac{2}{3} \left[\frac{2}{3} (1+t)^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 = \frac{4}{3} \sqrt{2} \ln(2) - \frac{8}{9} \sqrt{2} + \frac{4}{9}$.

12.1 j) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} t \tan^2 t dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} t(1 + \tan^2 t) dt - \int_0^{\frac{\pi}{4}} t dt$. On choisit dans la première intégrale, $v(t) = t$ et $u'(t) = 1 + \tan^2 t$. On obtient $[t \tan t]_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan t dt - \left[\frac{t^2}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4} + [\ln \cos(t)]_0^{\frac{\pi}{4}} - \frac{\pi^2}{32} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{\pi^2}{32}$.

12.2 a) Cette fonction est définie sur $\mathbb{R}$, y est continue et admet donc des primitives. Soit $x \in \mathbb{R}$, en choisissant $u'(t) = e^t$ et $v(t) = -t+1$, on a $\int_0^x (-t+1)e^t dt = [(-t+1)e^t]_0^x + \int_0^x e^t dt = (-x+1)e^x + e^x - 2$. Ainsi, $x \mapsto (-x+2)e^x$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de $x \mapsto (-x+1)e^x$.

12.2 b) Cette fonction est définie sur $\mathbb{R}_+^*$, y est continue et admet donc des primitives. Soit $x > 0$, par intégration par parties avec $u'(t) = \frac{1}{t^2}$ et $v(t) = \ln t$, on a $\int_1^x \frac{\ln t}{t^2} dt = \left[-\frac{\ln t}{t} \right]_1^x + \int_1^x \frac{1}{t^2} dt = -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} + 1$. Ainsi, $x \mapsto -\frac{\ln x + 1}{x}$ est donc une primitive sur $\mathbb{R}_+^*$ de f .

12.2 c) La fonction est définie sur $\mathbb{R}$ et y est continue. Soit $x \in \mathbb{R}$, on a en choisissant $u'(t) = 1$ et $v(t) = \arctan t$, $\int_0^x \arctan(t) dt = [t \arctan t]_0^x - \int_0^x \frac{t}{1+t^2} dt = x \arctan(x) - \frac{1}{2} \ln(1+x^2)$. D'où une primitive.

12.3 a) On effectue deux intégrations par parties successives : pour la première, $u'(t) = e^{2t}$ et $v(t) = t^2 + 3t - 4$ et ainsi $\int_0^1 (t^2 + 3t - 4)e^{2t} dt = \left[(t^2 + 3t - 4) \frac{e^{2t}}{2} \right]_0^1 - \int_0^1 (2t + 3) \frac{e^{2t}}{2} dt$. Puis, seconde intégration par parties avec, $v(t) = 2t + 3$ et $u'(t) = \frac{e^{2t}}{2}$ d'où : $-\int_0^1 (2t + 3) \frac{e^{2t}}{2} dt = 2 - \left[(2t + 3) \frac{e^{2t}}{4} \right]_0^1 + \frac{1}{2} \int_0^1 e^{2t} dt = \frac{11}{4} - \frac{5}{4} e^2 + \frac{1}{4} [e^{2t}]_0^1 = \frac{5}{2} - e^2$.

12.3 b) On choisit d'abord $u' = \exp$ et $v = \sin$; d'où : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^t \sin t dt = [e^t \sin t]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^t \cos t dt$. Ensuite $u' = \exp$ et $v = \cos$, d'où : $e^{\frac{\pi}{2}} - [e^t \cos t]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^t \sin t dt$. Finalement, $2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^t \sin t dt = e^{\frac{\pi}{2}} + 1$.

12.4 a) Cette fonction est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ et y est continue. Soit $x > 0$, en choisissant $u'(t) = 1$ et $v(t) = \ln^2 t$ on obtient $\int_1^x \ln^2 t dt = [t \ln^2 t]_1^x - \int_1^x 2 \ln t dt$. Puis, en choisissant $u'(t) = 1$ et $v(t) = \ln t$, on obtient $x \ln^2 x - 2[t \ln t]_1^x + 2 \int_1^x 1 dt = x \ln^2 x - 2x \ln x + 2x - 2$. Ainsi, $x \mapsto x \ln^2 x - 2x \ln x + 2x$ est une primitive sur $\mathbb{R}_+^*$ de $x \mapsto \ln^2 x$.

12.4 b) La fonction est définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$. Si $x > 0$, alors, avec $u'(t) = t^2$ et $v(t) = \ln^2(t)$, on a : $\int_1^x t^2 \ln^2 t dt = \left[\frac{t^3}{3} \ln^2 t \right]_1^x - \frac{2}{3} \int_1^x t^2 \ln t dt$ puis avec $u'(t) = t^2$ et $v(t) = \ln(t)$, on obtient $\frac{x^3}{3} \ln^2 x - \frac{2}{9} [t^3 \ln t]_1^x + \frac{2}{9} \int_1^x t^2 dt = \frac{x^3 \ln^2 x}{3} - \frac{2}{9} x^3 \ln x + \frac{2}{27} (x^3 - 1)$. D'où une primitive.

Fiche n° 13. Changements de variable

Réponses

13.1 a).....	$\frac{\pi}{2}$	13.2 e).....	$\frac{\pi}{12}$
13.1 b).....	$\frac{\pi}{6}$	13.2 f).....	$\frac{1}{2} \ln \frac{5}{2}$
13.1 c).....	$\frac{1}{4}$	13.3 a).....	$2e^2$
13.1 d).....	$\frac{1}{12}$	13.3 b).....	$-2((\sqrt{3}-1)\ln(\sqrt{3}-1)-4+2\sqrt{3})$
13.1 e).....	$2\ln\left(\frac{3}{2}\right)$	13.4 a).....	$\left\{ \begin{array}{l}]0, \frac{\pi}{2}[\rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \tan x + \ln \tan(x) \end{array} \right.$
13.2 a).....	$\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$	13.4 b).....	$\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto 2\arctan(\sqrt{e^x-1}) \end{array} \right.$
13.2 b).....	$\frac{1}{2} \ln\left(\frac{2e+1}{3}\right)$	13.4 c).....	$\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{3}{2} \ln(x^{\frac{2}{3}}+1) \end{array} \right.$
13.2 c).....	$\frac{\pi}{2}$	13.4 d).....	$\left\{ \begin{array}{l}]1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \arctan \sqrt{x^2-1} \end{array} \right.$
13.2 d).....	$\frac{1}{4} + \frac{\pi}{8}$		

Corrigés

13.1 a) On pose $t = \sin \theta$ avec $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. On a $\frac{dt}{d\theta} = \cos \theta$ et donc

$$\int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 \theta} \cos \theta d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(2\theta)+1}{2} d\theta = \frac{\pi}{2}.$$

13.1 b) On pose $u = \sqrt{t}$ avec $t \in [1, 3]$, donc $t = u^2$ et $u \in [1, \sqrt{3}]$. On a $\frac{dt}{du} = 2u$ et donc $dt = 2u du$. Ainsi,

$$\int_1^3 \frac{1}{\sqrt{t} + \sqrt{t^3}} dt = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{2u}{u+u^3} du = 2 \left[\arctan u \right]_1^{\sqrt{3}} = 2 \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\pi}{6}.$$

13.1 c) On pose $u = \sin t$ avec $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. On a $\frac{du}{dt} = \cos t$ et donc $du = \cos t dt$. Ainsi, $\int_0^1 u^3 du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 t \cos t dt$.

Finalement, on trouve

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 t \cos t dt = \left[\frac{1}{4} u^4 \right]_0^1 = \frac{1}{4}.$$

13.1 d) Remarquons qu'on a $\cos^3 t = (1 - \sin^2 t) \cos t$. On pose $u = \sin t$ avec $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

On a $\frac{du}{dt} = \cos t$ donc $du = \cos t dt$. Ainsi, $\int_0^1 u^3(1 - u^2) du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 t \cos^3 t dt$. Finalement,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 t \cos^3 t dt = \left[\frac{1}{4} u^4 - \frac{1}{6} u^6 \right]_0^1 = \frac{1}{4} - \frac{1}{6} = \frac{1}{12}.$$

13.1 e) On pose $u = \sqrt{t}$ avec $t \in [1, 4]$, donc $t = u^2$ et $u \in [1, 2]$. On a $\frac{dt}{du} = 2u$.

Ainsi, $\int_1^4 \frac{1}{t + \sqrt{t}} dt = \int_1^2 \frac{2u}{u^2 + u} du = 2 \int_1^2 \frac{1}{1 + u} du = 2 \left[\ln(1 + u) \right]_1^2 = 2(\ln(3) - \ln(2))$.

13.2 a) On pose $u = \cos t$ avec $t \in [0, \pi]$. On a $\frac{du}{dt} = -\sin t$. Ainsi, $\int_{-1}^1 \frac{1}{3 + u^2} du = \int_0^\pi \frac{\sin t}{3 + \cos^2 t} dt$ et finalement,

$$\int_0^\pi \frac{\sin t}{3 + \cos^2 t} dt = \frac{1}{3} \int_{-1}^1 \frac{1}{1 + \left(\frac{u}{\sqrt{3}}\right)^2} du = \frac{1}{\sqrt{3}} \left[\arctan \frac{u}{\sqrt{3}} \right]_{-1}^1 = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}.$$

13.2 b) On pose $u = e^t$ avec $t \in [0, 1]$, donc $t = \ln u$ et $u \in [1, e]$. On a $\frac{dt}{du} = \frac{1}{u}$ donc $dt = \frac{1}{u} du$.

Finalement, $\int_0^1 \frac{1}{2 + e^{-t}} dt = \int_1^e \frac{1}{2 + \frac{1}{u}} \frac{1}{u} du = \int_1^e \frac{1}{2u + 1} du = \left[\frac{1}{2} \ln(2u + 1) \right]_1^e = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{2e + 1}{3}\right)$.

13.2 c) On pose $u = \frac{1}{2}t - 1$ avec $t \in [2, 4]$, donc $t = 2u + 2$ et $u \in [0, 1]$. On a donc $dt = 2 du$.

Ainsi, $\int_2^4 \frac{1}{\sqrt{4t - t^2}} dt = 2 \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{4 - 4u^2}} du = \left[\arcsin u \right]_0^1 = \frac{\pi}{2}$.

13.2 d) On pose $t = \tan u$ avec $u \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$. On a $\frac{dt}{du} = (1 + \tan^2 u)$.

Ainsi, $\int_0^1 \frac{1}{(1 + t^2)^2} dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1 + \tan^2 u} du = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 u du = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos(2u) + 1}{2} du = \frac{1}{4} + \frac{\pi}{8}$.

13.2 e) On pose $u = \frac{1}{t}$ avec $t \in [\sqrt{2}, 2]$. On a $\frac{dt}{du} = -\frac{1}{u^2}$.

Ainsi, $\int_{\sqrt{2}}^2 \frac{1}{t\sqrt{t^2 - 1}} dt = - \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\frac{1}{u} \sqrt{\frac{1}{u^2} - 1}} \frac{1}{u^2} du = - \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{u^2} - 1}} du = - \left[\arcsin u \right]_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{12}$.

13.2 f) On pose $u = \ln(t)$ avec $t \in [e, e^2]$, donc $t = e^u$ et $u \in [1, 2]$. On a $\frac{dt}{du} = e^u$ et

$$\int_e^{e^2} \frac{\ln t}{t + t \ln^2 t} dt = \int_1^2 \frac{u}{1 + u^2} du = \left[\frac{1}{2} \ln(1 + u^2) \right]_1^2 = \frac{1}{2} \ln \frac{5}{2}.$$

13.3 a) On pose $u = \sqrt{t}$ avec $t \in [1, 4]$, donc on a $t = u^2$ avec $u \in [1, 2]$.

On a alors $\frac{dt}{du} = 2u$ d'où $\int_1^4 e^{\sqrt{t}} dt = \int_1^2 2ue^u du$. Cette nouvelle intégrale peut se calculer en faisant une intégration par parties. On trouve : $\int_1^2 2ue^u du = \left[2ue^u \right]_1^2 - \int_1^2 2e^u du = 2e^2$.

13.3 b) On pose $u = \sqrt{t}$ avec $t \in [3, 4]$, donc on a $t = u^2$ avec $u \in [\sqrt{3}, 2]$.

On a alors $\frac{dt}{du} = 2u$ d'où $\int_3^4 \frac{\ln(\sqrt{t} - 1)}{\sqrt{t}} dt = \int_{\sqrt{3}}^2 \frac{\ln(u - 1)}{u} 2u du = 2 \int_{\sqrt{3}}^2 \ln(u - 1) du$.

On fait maintenant une intégration par parties :

$$2 \int_{\sqrt{3}}^2 \ln(u - 1) du = 2 \left[(u - 1) \ln(u - 1) \right]_{\sqrt{3}}^2 - 2 \int_{\sqrt{3}}^2 du = -2((\sqrt{3} - 1) \ln(\sqrt{3} - 1) - 4 + 2\sqrt{3}).$$

13.4 a) La fonction est bien continue. Soit $(a, x) \in]0, \frac{\pi}{2}[^2$.

On calcule $\int_a^x \frac{\cos t + \sin t}{\sin t \cos^2 t} dt$ qui est aussi $\int_a^x \frac{1 + \frac{\sin t}{\cos t}}{\cos^2 t} dt$ en posant $u = \tan t$.

On a $\frac{1}{\cos^2 t} dt = du$ et, ainsi, $\int_a^x \frac{\cos t + \sin t}{\sin t \cos^2 t} dt = \int_{\tan a}^{\tan x} \left(1 + \frac{1}{u}\right) du = \left[u + \ln u\right]_{\tan a}^{\tan x} = \tan x + \ln \tan(x) + C$.

13.4 b) La fonction est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ et y est continue.

Avec le changement de variable $u = \sqrt{e^t - 1}$, on a $t = \ln(1 + u^2)$ et ainsi, $\frac{dt}{du} = \frac{2u}{1 + u^2}$.

Soit $x > 0$. On a ainsi $\int_1^x \frac{1}{\sqrt{e^t - 1}} dt = \int_{\sqrt{e-1}}^{\sqrt{e^x-1}} \frac{1}{u} \frac{2u}{1 + u^2} du = 2 \left[\arctan u \right]_{\sqrt{e-1}}^{\sqrt{e^x-1}} = 2 \arctan(\sqrt{e^x - 1}) + C$.

13.4 c) La fonction est définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

Le changement de variable $u = \sqrt[3]{t}$ donne $t = u^3$ et ainsi, $\frac{dt}{du} = 3u^2$. Soit $x > 0$. On a

$$\int_1^x \frac{1}{t + \sqrt[3]{t}} dt = \int_1^{\sqrt[3]{x}} \frac{3u^2}{u^3 + u} du = \int_1^{\sqrt[3]{x}} \frac{3u}{u^2 + 1} du = \left[\frac{3}{2} \ln(u^2 + 1) \right]_1^{\sqrt[3]{x}} = \frac{3}{2} \ln(x^{\frac{2}{3}} + 1) + C.$$

13.4 d) La fonction est définie et continue sur $]1, +\infty[$.

Le changement de variable $u = \sqrt{t^2 - 1}$ donne $t = \sqrt{u^2 + 1}$ et ainsi, $\frac{dt}{du} = \frac{u}{\sqrt{u^2 + 1}}$. Soit $a > 1$ et $x > 1$. On a

$$\int_a^x \frac{1}{t \sqrt{t^2 - 1}} dt = \int_{\sqrt{a^2-1}}^{\sqrt{x^2-1}} \frac{1}{u \sqrt{u^2 + 1}} \frac{u}{\sqrt{u^2 + 1}} du = \int_{\sqrt{a^2-1}}^{\sqrt{x^2-1}} \frac{1}{u^2 + 1} du = \arctan \sqrt{x^2 - 1} + C.$$

Fiche n° 14. Systèmes linéaires

Réponses

14.1 a) $\{(3, 1)\}$

14.1 b) $\{(7, 2)\}$

14.1 c) $\left\{\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)\right\}$

14.1 d) $\left\{\left(\frac{\sqrt{2}}{3}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right\}$

14.2 a) $\left\{\left(1 - \frac{a}{4}, \frac{-1}{2} + \frac{3}{8}a\right)\right\}$

14.2 b) $(2, -3)$

14.2 c) $\left\{\left(\frac{1}{13}a + \frac{5}{13}a^2, \frac{2}{13}a - \frac{3}{13}a^2\right)\right\}$

14.2 d) $(a - 2a^2, a + a^2)$

14.3 a) $\{(1 + z, -z, z); z \in \mathbb{R}\}$

14.3 b) $\{(1, y, 3 + 2y); y \in \mathbb{R}\}$

14.3 c) $\left\{\left(\frac{13}{6} - \frac{5}{3}z, -\frac{1}{3} + \frac{4}{3}z, z\right); z \in \mathbb{R}\right\}$

14.3 d) $\left\{\left(x, \frac{-5}{12} - \frac{3}{2}x, \frac{-25}{24} - \frac{7}{4}x\right); x \in \mathbb{R}\right\}$

14.4 a) $\{(2, -1, 3)\}$

14.4 b) $\{(-1, 4, 2)\}$

14.4 c) $\emptyset$

14.4 d) $\left\{\left(-\frac{2}{7} - z, \frac{-3}{7}, z\right); z \in \mathbb{R}\right\}$

14.5 a) $\{(1, 1/2, 1/2)\}$

14.5 b) $\emptyset$

14.5 c) $\{(5z, 1 - 4z, z); z \in \mathbb{R}\}$

14.5 d) $\left\{\left(1, \frac{1}{a+2}, \frac{1}{a+2}\right)\right\}$

14.6 a) $\{(5, 3, -1)\}$

14.6 b) $\emptyset$

14.6 c) $\left\{\left(\frac{a^2 + a - 1}{a^3 - 1}c, \frac{a^2 - a - 1}{a^3 - 1}c, \frac{-a^2 + a + 1}{a^3 - 1}c\right)\right\}$

14.7 a) $\{(0, 0, 0)\}$

14.7 b) $\{(x, y, -x - y); (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$

14.7 c) $\{(x, x, x); x \in \mathbb{R}\}$

Corrigés

14.1 a) On calcule :

$$\begin{cases} x - 2y = 1 \\ 3x + 4y = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + 2y \\ 3(1 + 2y) + 4y = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + 2y \\ 10y + 3 = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10y = 10 \\ x = 1 + 2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x = 3 \end{cases}$$

14.1 b) On calcule : $\begin{cases} 2x + y = 16 \\ x - y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 16 - 2x \\ x - 16 + 2x = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = 5 + 16 = 21 \\ y = 16 - 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 7 \\ y = 16 - 14 = 2 \end{cases}$

14.1 c) On calcule : $\begin{cases} 3x - 6y = -3 \\ 2x + 2y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y = -1 \\ x + y = 1 \end{cases} \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - L_1} \begin{cases} x - 2y = -1 \\ 3y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{2}{3} \\ x = -1 + 2 \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3} \end{cases}$

14.1 d) On calcule :

$$\begin{aligned} \begin{cases} 3x - 4y = -\sqrt{2} \\ 6x + 2y = 3\sqrt{2} \end{cases} &\xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1} \begin{cases} 3x - 4y = -\sqrt{2} \\ 8y + 2y = 2\sqrt{2} + 3\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 4y = -\sqrt{2} \\ 10y = 5\sqrt{2} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 3x = 4 \times \frac{\sqrt{2}}{2} - \sqrt{2} = \sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ x = \frac{\sqrt{2}}{3} \end{cases} \end{aligned}$$

14.2 a) On calcule : $\begin{cases} 3x + 2y = 2 \\ 2x + 4y = a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 - \frac{3}{2}x \\ 2x + 4 - 6x = a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 - \frac{3}{2}x \\ -4x = a - 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - \frac{a}{4} \\ y = 1 - \frac{3}{2} + \frac{3}{8}a = \frac{-1}{2} + \frac{3}{8}a \end{cases}$

14.2 b) On calcule :

$$\begin{cases} x - ay = 3a + 2 \\ ax + y = 2a - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = ay + 3a + 2 \\ a^2y + 3a^2 + 2a + y = 2a - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = ay + 3a + 2 \\ (a^2 + 1)y = 2a - 3 - 3a^2 - 2a \end{cases}$$

$$\stackrel{1+a^2 \neq 0}{\Leftrightarrow} \begin{cases} y = \frac{-3 - 3a^2}{1 + a^2} = -3 \\ x = -3a + 3a + 2 = 2 \end{cases}$$

14.2 c) On calcule :

$$\begin{cases} 3x + 5y = a \\ 2x - y = a^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x - a^2 \\ 3x + 5 \times (2x - a^2) = a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x - a^2 \\ 13x - 5a^2 = a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{13}a + \frac{5}{13}a^2 \\ y = 2 \times \left(\frac{1}{13}a + \frac{5}{13}a^2 \right) - a^2 = \frac{2}{13}a - \frac{3}{13}a^2 \end{cases}$$

14.2 d) On calcule :

$$\begin{cases} x + 2y = 3a \\ 2x + 3y = 5a - a^2 \end{cases} \stackrel{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x + 2y = 3a \\ -y = 5a - a^2 - 6a = -a^2 - a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = a + a^2 \\ x = 3a - 2(a + a^2) = a - 2a^2 \end{cases}$$

14.3 a) On calcule : $\begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ 3x + y - 2z = 3 \end{cases} \stackrel{L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ -5y - 5z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -z \\ x - 2z + z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + z \\ y = -z \end{cases}$

14.3 b) On calcule : $\begin{cases} 3x - 2y + z = 6 \\ x + 2y - z = -2 \end{cases} \stackrel{L_1 \leftarrow L_1 + L_2}{\Leftrightarrow} \begin{cases} 4x = 4 \\ x + 2y - z = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ 2y - z = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ z = 2y + 3 \end{cases}$

14.3 c) On calcule :

$$\begin{cases} x - y + 3z = \frac{5}{2} \\ x + 2y - z = \frac{3}{2} \end{cases} \stackrel{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x - y + 3z = \frac{5}{2} \\ 3y - 4z = \frac{3}{2} - \frac{5}{2} = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{-1}{3} + \frac{4}{3}z \\ x = \frac{-1}{3} + \frac{4}{3}z - 3z + \frac{5}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{-1}{3} + \frac{4}{3}z \\ x = \frac{13}{6} - \frac{5}{3}z \end{cases}$$

14.3 d) On calcule :

$$\begin{cases} 5x + y + 2z = -\frac{5}{2} \\ 2x - y + 2z = -\frac{5}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{5}{2} - 5x - 2z \\ 2x + \frac{5}{2} + 5x + 2z + 2z = -\frac{5}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7x + 4z = -\frac{5}{3} - \frac{5}{2} = \frac{-25}{6} \\ y = -\frac{5}{2} - 5x - 2z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z = \frac{-25}{24} - \frac{7}{4}x \\ y = -\frac{5}{2} - 5x + \frac{25}{12} + \frac{7}{2}x = \frac{-5}{12} - \frac{3}{2}x \end{cases}$$

14.4 a) On calcule :

$$\begin{aligned} \begin{cases} x+2y-z=-3 \\ 2x-y+z=8 \\ 3x+y+2z=11 \end{cases} &\xLeftrightarrow[L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1, L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1] \begin{cases} x+2y-z=-3 \\ -5y+3z=14 \\ -5y+5z=20 \end{cases} \xLeftrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 - L_2] \begin{cases} x+2y-z=-3 \\ -5y+3z=14 \\ 2z=6 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} z=3 \\ x+2y-3=-3 \\ -5y+3 \times 3=14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=3 \\ x+2y=0 \\ -5y=14-9=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=3 \\ y=-1 \\ x=-2y=2 \end{cases} \end{aligned}$$

14.4 b) On calcule :

$$\begin{aligned} \begin{cases} a-b-c=-7 \\ 3a+2b-c=3 \\ 4a+b+2c=4 \end{cases} &\xLeftrightarrow[L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1, L_3 \leftarrow L_3 - 4L_1] \begin{cases} a-b-c=-7 \\ 5b+2c=24 \\ 5b+6c=32 \end{cases} \xLeftrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 - L_2] \begin{cases} a-b-c=-7 \\ 5b+2c=24 \\ 4c=8 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} c=2 \\ a-b-2=-7 \\ 5b+2 \times 2=24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=2 \\ b=4 \\ a=-5+4=-1 \end{cases} \end{aligned}$$

14.4 c) On calcule : $\begin{cases} x+3y+z=1 \\ 2x-y+2z=-1 \\ x+10y+z=0 \end{cases} \xLeftrightarrow[L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1, L_3 \leftarrow L_3 - L_1] \begin{cases} x+3y+z=1 \\ -7y=-3 \\ 7y=-1 \end{cases} \xLeftrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 + L_2] \begin{cases} x+3y+z=1 \\ -7y=-3 \\ 0=-4 \end{cases} .$

Le système est incompatible car l'équation $0 = -4$ n'a pas de solution.

14.4 d) On va extraire y de la deuxième équation, puis résoudre par substitution. On calcule :

$$\begin{aligned} \begin{cases} 3x+2y+3z=0 \\ 2x-y+2z=-1 \\ 4x+5y+4z=1 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} y=2x+2z+1 \\ 3x+4x+4z+2+3z=0 \\ 4x+10x+10z+5+4z=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2x+2z+1 \\ 7x+7z=-2 \\ 14x+14z=-4 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y=2x+2z+1 \\ x=-z-\frac{2}{7} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-z-\frac{2}{7} \\ y=-2z-\frac{4}{7}+2z+1=\frac{3}{7} \end{cases} \end{aligned}$$

14.5 a) On calcule :

$$\begin{aligned} \begin{cases} x+y-z=1 \\ x+2y=2 \\ 2x+2z=3 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x=2-2y \\ 2-2y+y-z=1 \\ 4-4y+2z=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2-2y \\ -y-z=-1 \\ -4y+2z=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2-2y \\ y=1-z \\ -4+4z+2z=-1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x=2-2y \\ y=1-z \\ 6z=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=3/6=1/2 \\ y=1-1/2=1/2 \\ x=2-1=1 \end{cases} \end{aligned}$$

14.5 b) On calcule :

$$\begin{aligned} \begin{cases} x+y-z=1 \\ x+2y-2z=2 \\ 2x-2y+2z=3 \end{cases} &\xLeftrightarrow[L_2 \leftarrow L_2 - L_1, L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1] \begin{cases} x+y-z=1 \\ y-z=1 \\ -4y+4z=1 \end{cases} \xLeftrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 + 4L_2] \begin{cases} x+y-z=1 \\ y-z=1 \\ 0=5 \end{cases} \end{aligned}$$

Le système est incompatible car l'équation $0 = 5$ n'a pas de solution.

14.5 c) On calcule :

$$\begin{aligned} \begin{cases} x+y-z=1 \\ x+2y+3z=2 \\ 2x+3y+2z=3 \end{cases} &\xLeftrightarrow[L_2 \leftarrow L_2 - L_1, L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1] \begin{cases} x+y-z=1 \\ y+4z=1 \\ y+4z=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=1-4z \\ x=-(1-4z)+z+1=5z-1+1=5z \end{cases} . \end{aligned}$$

14.5 d) On calcule :

$$\begin{aligned} \begin{cases} x+y-z=1 \\ x+2y+az=2 \\ 2x+ay+2z=3 \end{cases} & \xLeftrightarrow[L_2 \leftarrow L_2 - L_1, L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1] \begin{cases} x+y-z=1 \\ y+(a+1)z=1 \\ (a-2)y+4z=1 \end{cases} \xLeftrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 + (2-a)L_2] \begin{cases} x+y-z=1 \\ y+(a+1)z=1 \\ (4+(2-a)(a+1))z=3-a \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} x+y-z=1 \\ y+(a+1)z=1 \\ (4+a+2-a^2)z=3-a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y-z=1 \\ y+(a+1)z=1 \\ (-a^2+a+6)z=3-a \end{cases} \end{aligned}$$

On factorise le trinôme $-(a^2 - a - 6) = -(a+2)(a-3)$ qui est non nul dans le cas étudié.

$$\text{D'où : } \begin{cases} x+y-z=1 \\ y+(a+1)z=1 \\ (-a^2+a+6)z=3-a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = \frac{3-a}{-(a+2)(a-3)} = \frac{1}{a+2} \\ y = 1 - (a+1) \times \frac{1}{a+2} \\ x = 1 - y + z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = \frac{1}{a+2} \\ y = \frac{a+2-a-1}{a+2} = \frac{1}{a+2} \\ x = 1 - \frac{1}{a+2} + \frac{1}{a+2} = 1 \end{cases}$$

14.6 a) On calcule :

$$\begin{cases} x-2z=7 \\ 2x-y=7 \\ 2y-z=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=7+2z \\ 14+4z-y=7 \\ 2y-z=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=7+2z \\ y=7+4z \\ 14+8z-z=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=7+2z \\ y=7+4z \\ 7z=-7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=-1 \\ y=7-4=3 \\ x=7-2=5 \end{cases}$$

14.6 b) On calcule :

$$\begin{cases} x-z=2 \\ x-y=2 \\ y-z=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2+z \\ 2+z-y=2 \\ y-z=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2+z \\ y=z \\ 0=2 \end{cases}$$

Le système est incompatible car l'équation $0=2$ n'a pas de solution.

14.6 c) On calcule :

$$\begin{aligned} \begin{cases} x-az=c \\ ax-y=c \\ ay-z=c \end{cases} & \Leftrightarrow \begin{cases} x=c+az \\ a(c+az)-y=c \\ ay-z=c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=c+az \\ y=(a-1)c+a^2z \\ a(a-1)c+a^2z-z=c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=c+az \\ y=(a-1)c+a^2z \\ a((a-1)c+a^2z)-z=c \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} x=c+az \\ y=(a-1)c+a^2z \\ (a^3-1)z=(1+a-a^2)c \end{cases} \end{aligned}$$

Dans $\mathbb{R}$, l'équation $a^3 - 1 = 0$ a pour unique solution $a = 1$ (fonction $t \mapsto t^3$ strictement croissante). Or $a \neq 1$, donc $a^3 - 1 \neq 0$, on peut déterminer z dans la troisième équation.

$$\begin{cases} x=c+az \\ y=(a-1)c+a^2z \\ (a^3-1)z=(1+a-a^2)c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=c \frac{-a^2+a+1}{(a-1)(a^2+a+1)} = \frac{-a^2+a+1}{a^3-1}c \\ y=(a-1)c+a^2 \frac{-a^2+a+1}{a^3-1}c = \frac{a^2-a+1}{a^3-1}c \\ x=c+a \frac{-a^2+a+1}{a^3-1}c = \frac{a^2+a-1}{a^3-1}c \end{cases}$$

14.7 a) On calcule :

$$\begin{aligned} \begin{cases} 4x+y+z=x \\ x+4y+z=y \\ x+y+4z=z \end{cases} & \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+y+z=0 \\ x+3y+z=0 \\ x+y+3z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=-3x-y \\ x+3y-3x-y=0 \\ x+y+3 \times (-3x-y)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=-3x-y \\ x=y \\ -10x=0 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow x=y=z=0 \end{aligned}$$

14.7 b) On calcule : $\begin{cases} 4x + y + z = 3x \\ x + 4y + z = 3y \\ x + y + 4z = 3z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + y + z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow z = -x - y$

14.7 c) On calcule :

$$\begin{aligned} \begin{cases} 4x + y + z = 6x \\ x + 4y + z = 6y \\ x + y + 4z = 6z \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} -2x + y + z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ x + y - 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 2x - y \\ x - 2y + 2x - y = 0 \\ x + y - 2 \times (2x - y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 2x - y \\ 3x - 3y = 0 \\ -3x + 3y = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ z = 2x - x = x \end{cases} \end{aligned}$$

Fiche n° 15. Nombres complexes

Réponses

15.1 a) $\boxed{4 + 32i}$	15.1 g) $\boxed{\frac{4}{29} - \frac{19}{29}i}$	15.2 c) $\boxed{\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{2}}}$	15.2 h) $\boxed{2\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)e^{i\frac{\pi}{4}}}$
15.1 b) $\boxed{13 - i}$		15.2 d) $\boxed{2e^{-i\frac{\pi}{2}}}$	15.3 a) $\boxed{1}$
15.1 c) $\boxed{7 - 24i}$	15.1 h) $\boxed{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i}$	15.2 e) $\boxed{2e^{i\frac{8\pi}{5}}}$	15.3 b) ... $\boxed{\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}}$
15.1 d) $\boxed{5}$	15.2 a) $\boxed{12}$	15.2 f) $\boxed{5e^{-\frac{\pi}{4}i}}$	
15.1 e) .. $\boxed{-119 + 120i}$	15.2 b) $\boxed{8e^{i\pi}}$	15.2 g) $\boxed{10e^{-\frac{2\pi}{3}i}}$	15.3 c) .. $\boxed{-\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}}$
15.1 f) $\boxed{\frac{3}{10} + \frac{1}{10}i}$			

Corrigés

15.1 a) On développe : $(2 + 6i)(5 + i) = 10 + 2i + 30i + 6i^2 = 10 + 32i - 6 = 4 + 32i$.

15.1 b) On développe : $(3 - i)(4 + i) = 12 + 3i - 4i - i^2 = 12 - i + 1 = 13 - i$.

15.1 c) On développe : $(4 - 3i)^2 = 4^2 - 2 \times 4 \times 3i + (3i)^2 = 16 - 24i - 9 = 7 - 24i$

15.1 d) On développe : $(1 - 2i)(1 + 2i) = 1^2 - (2i)^2 = 1 + 4 = 5$.

Ou bien : en posant $z = 1 - 2i$, on reconnaît la quantité $z\bar{z}$, c'est-à-dire $|z|^2$. Ainsi, $(1 - 2i)(1 + 2i) = 1^2 + 2^2 = 5$.

15.1 e) On développe :

$$(2 - 3i)^4 = ((2 - 3i)^2)^2 = (4 - 2 \times 2 \times 3i - 9)^2 = (-5 - 12i)^2 = (5 + 12i)^2 = 5^2 + 2 \times 5 \times 12i - 12^2 = -119 + 120i.$$

Ou bien : avec la formule du binôme de Newton,

$$\begin{aligned} (2 - 3i)^4 &= \sum_{k=0}^4 \binom{4}{k} 2^k (-3i)^{4-k} \\ &= (-3i)^4 + 4 \times 2 \times (-3i)^3 + 6 \times 2^2 \times (-3i)^2 + 4 \times 2^3 \times (-3i) + 2^4 \\ &= 81 + 216i - 216 - 96i + 16 = -119 + 120i. \end{aligned}$$

15.1 f) On utilise l'expression conjuguée : $\frac{1}{3-i} = \frac{3+i}{(3-i)(3+i)} = \frac{3+i}{3^2+1^2} = \frac{3}{10} + \frac{1}{10}i$

15.1 g) On utilise l'expression conjuguée et on développe :

$$\frac{2-3i}{5+2i} = \frac{(2-3i)(5-2i)}{(5+2i)(5-2i)} = \frac{10-4i-15i-6}{5^2+2^2} = \frac{4}{29} - \frac{19}{29}i.$$

15.1 h) On utilise la définition de l'écriture exponentielle et la trigonométrie :

$$e^{-i\frac{\pi}{3}} = \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

15.2 a) On a $|12| = 12$ et $\arg(12) = 0$, donc la réponse est 12 (ou $12e^{0i}$).

15.2 b) On a $|-8| = 8$ et $-1 = e^{i\pi}$.

15.2 c) On a $|\sqrt{3}i| = \sqrt{3}$ et $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$.

15.2 d) On a $|-2i| = 2$ et $-i = \bar{i} = e^{i\frac{\pi}{2}} = e^{-i\frac{\pi}{2}}$.

15.2 e) On écrit que $-2 = 2e^{i\pi}$ et on utilise les propriétés de l'exponentielle :

$$-2e^{i\frac{3\pi}{5}} = 2e^{i\pi}e^{i\frac{3\pi}{5}} = 2e^{i\pi+i\frac{3\pi}{5}} = 2e^{i\frac{8\pi}{5}}.$$

15.2 f) On calcule $|5 - 5i| = \sqrt{5^2 + 5^2} = \sqrt{2 \times 5^2} = 5\sqrt{2}$ et on écrit

$$5 - 5i = 5\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 5\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right).$$

15.2 g) On calcule $|-5 + 5i\sqrt{3}| = \sqrt{25 + 75} = 10$ puis on écrit

$$-5 + 5i\sqrt{3} = 10\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 10\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right).$$

15.2 h) On écrit que $e^{i\frac{\pi}{3}} + e^{i\frac{\pi}{6}} = e^{i\frac{\pi}{4}}\left(e^{i(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4})} + e^{i(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{4})}\right) = e^{i\frac{\pi}{4}}(e^{i\frac{\pi}{12}} + e^{-i\frac{\pi}{12}}) = 2\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)e^{i\frac{\pi}{4}}$.

Ainsi, $|e^{i\frac{\pi}{3}} + e^{i\frac{\pi}{6}}| = 2\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ (car $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) \geq 0$ et $|e^{i\frac{\pi}{4}}| = 1$. Et $\arg(e^{i\frac{\pi}{3}} + e^{i\frac{\pi}{6}}) = \arg(e^{i\frac{\pi}{4}}) = \frac{\pi}{4}$.

On en déduit que l'écriture exponentielle de $e^{i\frac{\pi}{3}} + e^{i\frac{\pi}{6}}$ est $2\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)e^{i\frac{\pi}{4}}$.

15.3 a) On remarque que le dénominateur de z est le conjugué du numérateur. Ainsi, $|z| = 1$.

15.3 b) De plus, en multipliant par le conjugué, on obtient

$$\begin{aligned} z &= \frac{(1 + \sqrt{2} + i)^2}{(1 + \sqrt{2} - i)(1 + \sqrt{2} + i)} = \frac{(1 + \sqrt{2})^2 + 2(1 + \sqrt{2})i - 1}{(1 + \sqrt{2})^2 + 1} \\ &= \frac{1 + 2\sqrt{2} + 2 + 2(1 + \sqrt{2})i - 1}{1 + 2\sqrt{2} + 2 + 1} = \frac{2 + 2\sqrt{2} + 2(1 + \sqrt{2})i}{4 + 2\sqrt{2}} \\ &= \frac{2(1 + \sqrt{2})(1 + i)}{2\sqrt{2}(\sqrt{2} + 1)} = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i, \end{aligned}$$

15.3 c) Enfin, $z = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i = e^{i\frac{\pi}{4}}$, donc $z^{2021} = (e^{i\frac{\pi}{4}})^{2021} = e^{\frac{2021}{4}i\pi}$.

Comme $2021 = 4 \times 505 + 1$, on a $e^{\frac{2021}{4}i\pi} = e^{505i\pi + \frac{\pi}{4}i} = e^{505i\pi}e^{\frac{\pi}{4}i} = -e^{i\frac{\pi}{4}}$.

Fiche n° 16. Trigonométrie et nombres complexes

Réponses

16.1 a) $\frac{1}{4} \cos(3x) + \frac{3}{4} \cos(x)$

16.1 b) $-\frac{1}{4} \cos(4x) + \frac{1}{2} \cos(2x) - \frac{1}{4}$

16.1 c) ... $-\frac{1}{8} \cos(6x) + \frac{1}{4} \cos(4x) - \frac{3}{8} \cos(2x) + \frac{1}{4}$

16.1 d) ... $-\frac{\sin(9x)}{8} + \frac{3\sin(5x)}{8} - \frac{\sin(3x)}{8} - \frac{3\sin(x)}{8}$

16.1 e) $\frac{\cos(9x)}{8} + \frac{3\cos(5x)}{8} + \frac{\cos(3x)}{8} + \frac{3\cos(x)}{8}$

16.1 f) $-\frac{1}{4} \sin(11x) + \frac{1}{4} \sin(5x) + \frac{1}{2} \sin(3x)$

16.2 a) $2 \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) e^{i\frac{\pi}{12}}$

16.2 b) $\left(-2 \cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)\right) e^{-i\frac{5\pi}{12}}$

16.2 c) $2 \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) e^{-i\frac{7\pi}{12}}$

16.2 d) $2 \cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) e^{i\frac{5\pi}{12}}$

16.2 e) $2 \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) e^{i\frac{13\pi}{12}}$

16.2 f) $2 \sin\left(\frac{\pi}{24}\right) e^{-i\frac{11\pi}{24}}$

16.2 g) $\frac{\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{24}\right)} e^{i\frac{13\pi}{24}}$

16.2 h) $2^{27} \cos^{27}\left(\frac{\pi}{12}\right) e^{i\frac{\pi}{4}}$

16.3 a) $2 \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) e^{i\frac{5\pi}{12}}$

16.3 b) $2 \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) e^{i\frac{11\pi}{12}}$

16.4 a) $4 \cos^3(x) - 3 \cos(x)$

16.4 b) $4 \cos^3(x) \sin(x) - 4 \cos(x) \sin^3(x)$

16.5 a) $2 \cos(2x) \cos(x)$

16.5 b) $2 \cos(4x) \sin(x)$

16.5 c) $2 \sin(x) \sin(2x)$

16.5 d) $2 \sin(4x) \cos(x)$

16.6 a) $\frac{\sin\left(\frac{3x}{2}\right) \sin(2x)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$

16.6 b) $\frac{\sin(8x)}{2 \sin(x)}$

16.6 c) 0

Corrigés

16.1 a) On calcule :

$$\begin{aligned} \cos^3(x) &= \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^3 = \frac{1}{8} (e^{3ix} + 3e^{2ix}e^{-ix} + 3e^{ix}e^{-2ix} + e^{-3ix}) = \frac{1}{8} (e^{3ix} + e^{-3ix}) + \frac{3}{8} (e^{ix} + e^{-ix}) \\ &= \frac{1}{4} \cos(3x) + \frac{3}{4} \cos x. \end{aligned}$$

16.1 b) On calcule :

$$\begin{aligned} \cos(2x) \sin^2(x) &= \left(\frac{e^{2ix} + e^{-2ix}}{2}\right) \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^2 = -\frac{1}{8} (e^{2ix} + e^{-2ix}) (e^{2ix} - 2 + e^{-2ix}) \\ &= -\frac{1}{8} (e^{4ix} + e^{-4ix} - 2(e^{2ix} + e^{-2ix}) + 2) = -\frac{1}{4} \cos(4x) + \frac{1}{2} \cos(2x) - \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

16.1 d) On calcule :

$$\begin{aligned}\cos(3x) \sin^3(2x) &= \left(\frac{e^{3ix} + e^{-3ix}}{2} \right) \left(\frac{e^{2ix} - e^{-2ix}}{2i} \right)^3 = -\frac{1}{16i} (e^{3ix} + e^{-3ix}) (e^{6ix} - 3e^{2ix} + 3e^{-2ix} - e^{-6ix}) \\ &= -\frac{1}{16i} (e^{9ix} - e^{-9ix} - 3(e^{5ix} - e^{-5ix}) + e^{3ix} - e^{-3ix} + 3(e^{ix} - e^{-ix})) \\ &= -\frac{1}{8} \sin(9x) + \frac{3}{8} \sin(5x) - \frac{1}{8} \sin(3x) - \frac{3}{8} \sin(x).\end{aligned}$$

16.2 a) $1 + e^{i\frac{\pi}{6}} = e^{i\frac{\pi}{12}} \left(e^{-i\frac{\pi}{12}} + e^{i\frac{\pi}{12}} \right) = \underbrace{2 \cos\left(\frac{\pi}{12}\right)}_{>0} e^{i\frac{\pi}{12}}.$

16.2 b) $1 + e^{i\frac{7\pi}{6}} = e^{i\frac{7\pi}{12}} \left(e^{-i\frac{7\pi}{12}} + e^{i\frac{7\pi}{12}} \right) = \underbrace{2 \cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)}_{<0} e^{i\frac{7\pi}{12}} = \left(-2 \cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) \right) e^{i\frac{7\pi}{12}} e^{-i\pi} = \left(-2 \cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) \right) e^{-i\frac{5\pi}{12}}.$

16.2 c) $e^{-i\frac{\pi}{6}} - 1 = e^{-i\frac{\pi}{12}} \left(e^{-i\frac{\pi}{12}} - e^{i\frac{\pi}{12}} \right) = e^{-i\frac{\pi}{12}} \left(-2i \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) \right) = 2 \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) e^{-i\frac{\pi}{12} - i\frac{\pi}{2}} = 2 \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) e^{-\frac{7i\pi}{12}}.$

16.2 d) $1 + ie^{i\frac{\pi}{3}} = 1 + e^{i\frac{5\pi}{6}} = e^{i\frac{5\pi}{12}} 2 \cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = 2 \cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) e^{i\frac{5\pi}{12}}$

16.2 e) $-1 - e^{i\frac{\pi}{6}} = -e^{i\frac{\pi}{12}} \left(e^{-i\frac{\pi}{12}} + e^{i\frac{\pi}{12}} \right) = \underbrace{-2 \cos\left(\frac{\pi}{12}\right)}_{<0} e^{i\frac{\pi}{12}} = 2 \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) e^{i\frac{\pi}{12} + i\pi} = 2 \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) e^{i\frac{13\pi}{12}}.$

16.2 f) $1 - e^{i\frac{\pi}{12}} = e^{i\frac{\pi}{24}} \left(-2i \sin\left(\frac{\pi}{24}\right) \right) = 2 \sin\left(\frac{\pi}{24}\right) e^{i\frac{\pi}{24}} e^{-i\frac{\pi}{2}} = 2 \sin\left(\frac{\pi}{24}\right) e^{-i\frac{11\pi}{24}}.$

16.2 g) On fait le quotient de a) et f).

16.2 h) $(1 + e^{i\frac{\pi}{6}})^{27} = \left(2 \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) e^{i\frac{\pi}{12}} \right)^{27} = 2^{27} \cos^{27}\left(\frac{\pi}{12}\right) e^{i\frac{\pi}{4}}.$

16.3 a) $e^{i\frac{\pi}{3}} + e^{i\frac{\pi}{2}} = e^{i\frac{\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2}}{2}} \left(e^{i\frac{\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{2}}{2}} + e^{i\frac{\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}}{2}} \right) = \underbrace{2 \cos\left(\frac{\pi}{12}\right)}_{>0} e^{i\frac{5\pi}{12}}.$

16.3 b) $e^{i\frac{\pi}{3}} - e^{i\frac{\pi}{2}} = e^{i\frac{\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2}}{2}} \left(e^{i\frac{\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{2}}{2}} - e^{i\frac{\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}}{2}} \right) = 2 \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) i e^{5i\frac{\pi}{12}} = 2 \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) e^{5i\frac{\pi}{12} + i\frac{\pi}{2}} = \underbrace{2 \sin\left(\frac{\pi}{12}\right)}_{>0} e^{i\frac{11\pi}{12}}.$

16.4 a) On calcule :

$$\begin{aligned}\cos(3x) &= \operatorname{Re}(e^{3ix}) = \operatorname{Re}((e^{ix})^3) = \operatorname{Re}((\cos(x) + i \sin(x))^3) \\ &= \operatorname{Re}(\cos^3(x) + 3i \cos^2(x) \sin(x) - 3 \cos(x) \sin^2(x) - i \sin^3(x)) \\ &= \cos^3(x) - 3 \cos(x) \sin^2(x) = \cos^3(x) - 3 \cos(x)(1 - \cos^2(x)) \\ &= 4 \cos^3(x) - 3 \cos(x).\end{aligned}$$

16.4 b) On calcule :

$$\begin{aligned}\sin(4x) &= \operatorname{Im}(e^{4ix}) = \operatorname{Im}((e^{ix})^4) = \operatorname{Im}((\cos(x) + i \sin(x))^4) \\ &= \operatorname{Im}(\cos^4(x) + 4i \cos^3(x) \sin(x) - 6 \cos^2(x) \sin^2(x) - 4i \cos(x) \sin^3(x) + \sin^4(x)) \\ &= 4 \cos^3(x) \sin(x) - 4 \cos(x) \sin^3(x).\end{aligned}$$

16.5 a) $\cos(x) + \cos(3x) = \operatorname{Re}(e^{ix} + e^{3ix}) = \operatorname{Re}\left(e^{i\frac{x+3x}{2}} (e^{i(-x)} + e^{ix})\right) = \operatorname{Re}(e^{2ix} 2 \cos(x)) = 2 \cos(2x) \cos(x).$

16.5 b) $\sin(5x) - \sin(3x) = \operatorname{Im}(e^{5ix} - e^{3ix}) = \operatorname{Im}(e^{4ix}(e^{ix} - e^{-ix})) = \operatorname{Im}(e^{4ix}2i \sin(x)) = 2 \cos(4x) \sin(x).$

16.5 c) $\cos(x) - \cos(3x) = \operatorname{Re}(e^{ix} - e^{3ix}) = \operatorname{Re}\left(e^{i\frac{x+3x}{2}}(e^{i(-x)} - e^{ix})\right) = \operatorname{Re}(e^{2ix}(-2i) \sin(x)) = 2 \sin(x) \sin(2x).$

16.5 d) $\sin(3x) + \sin(5x) = \operatorname{Im}(e^{3ix} + e^{5ix}) = \operatorname{Im}(e^{4ix}(e^{-ix} + e^{ix})) = \operatorname{Im}(e^{4ix}2 \cos(x)) = 2 \sin(4x) \cos(x).$

16.6 a) Si $x \in 2\pi\mathbb{Z}$, alors cette somme vaut 0. Sinon, $\sin(x) + \sin(2x) + \sin(3x) = \operatorname{Im}(e^{ix} + e^{2ix} + e^{3ix})$
 $= \operatorname{Im}\left(1 + e^{ix} + (e^{ix})^2 + (e^{ix})^3\right).$ Or, $e^{ix} \neq 1$ donc $1 + e^{ix} + (e^{ix})^2 + (e^{ix})^3 = \frac{1 - e^{4ix}}{1 - e^{ix}}.$

On utilise maintenant l'astuce de l'arc moitié. On obtient,

$$\sin(x) + \sin(2x) + \sin(3x) = \operatorname{Im}\left(\frac{e^{2ix} - 2i \sin(2x)}{e^{i\frac{x}{2}} - 2i \sin(\frac{x}{2})}\right) = \operatorname{Im}\left(e^{i\frac{3x}{2}} \frac{\sin(2x)}{\sin(\frac{x}{2})}\right) = \frac{\sin(\frac{3x}{2}) \sin(2x)}{\sin(\frac{x}{2})}.$$

16.6 b) Si $x \in 2\pi\mathbb{Z}$, alors cette somme vaut 4.

Si x est de la forme $\pi + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$, la somme vaut -4 .

Sinon, on calcule :

$$\begin{aligned} \cos(x) + \cos(3x) + \cos(5x) + \cos(7x) &= \operatorname{Re}(e^{ix} + e^{3ix} + e^{5ix} + e^{7ix}) \\ &= \operatorname{Re}(e^{ix}(1 + (e^{2ix}) + (e^{2ix})^2 + (e^{2ix})^3)). \end{aligned}$$

Or, $e^{2ix} \neq 1$ donc

$$e^{ix}(1 + (e^{2ix}) + (e^{2ix})^2 + (e^{2ix})^3) = e^{ix} \frac{1 - (e^{2ix})^4}{1 - e^{2ix}} = e^{ix} \frac{1 - (e^{8ix})}{1 - e^{2ix}} = e^{ix} \frac{e^{4ix} - 2i \sin(4x)}{e^{ix} - 2i \sin(x)} = e^{4ix} \frac{\sin(4x)}{\sin(x)}.$$

Finalement, on a

$$\cos(x) + \cos(3x) + \cos(5x) + \cos(7x) = \frac{\cos(4x) \sin(4x)}{\sin(x)} = \frac{\sin(8x)}{2 \sin(x)}.$$

16.6 c) On calcule :

$$\cos(x) + \cos\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(x + \frac{4\pi}{3}\right) = \operatorname{Re}\left(e^{ix} + e^{i(x+\frac{2\pi}{3})} + e^{i(x+\frac{4\pi}{3})}\right) = \operatorname{Re}\left(e^{ix} \underbrace{(1 + j + j^2)}_{=0}\right) = 0.$$

Fiche n° 17. Sommes et produits

Réponses

17.1 a).....	$\boxed{n(n+2)}$	17.3 b).....	$\boxed{3^{\frac{n(n+1)}{2}}}$	17.6 d).....	$\boxed{\frac{n+1}{2n}}$
17.1 b).....	$\boxed{\frac{7(n+1)(n+4)}{2}}$	17.3 c).....	$\boxed{5^n(n!)^{\frac{3}{2}}}$	17.7 a).....	$\boxed{1 - \frac{1}{n+1}}$
17.1 c).....	$\boxed{\frac{n(5n+1)}{2}}$	17.3 d).....	$\boxed{0}$	17.7 b).....	$\boxed{\frac{1}{2} - \frac{1}{n+3}}$
17.1 d).....	$\boxed{\frac{(n-2)(n-7)}{6}}$	17.4 a).....	$\boxed{\frac{n(n+1)}{2}}$	17.8 a).....	$\boxed{2n^2 + n}$
17.2 a).....	$\boxed{\frac{n(n+1)(n+2)}{3}}$	17.4 b).....	$\boxed{0}$	17.8 b).....	$\boxed{\frac{n(3n+1)}{2}}$
17.2 b)...	$\boxed{n(n+1)(n^2+n+4)}$	17.4 c).....	$\boxed{n2^{n+1} + 2(1-2^n)}$	17.9 a).....	$\boxed{\frac{n^2(n+1)}{2}}$
17.2 c).....	$\boxed{\frac{9}{2}(3^{n-2} - 1)}$	17.4 d).....	$\boxed{\frac{n^2(n+1)^2}{4}}$	17.9 b).....	$\boxed{\frac{n(n+3)}{4}}$
17.2 d).....	$\boxed{5^{n+1} \frac{1 - (\frac{2}{5})^{n+1}}{3}}$	17.5 a).....	$\boxed{(n+2)^3 - 2^3}$	17.9 c).....	$\boxed{\frac{n(n^2-1)}{2}}$
17.2 e)...	$\boxed{\frac{7}{6}(7^n - 1) + n(n+4)}$	17.5 b).....	$\boxed{\ln(n+1)}$	17.9 d) ..	$\boxed{\frac{n(n+1)(7n^2+13n+4)}{12}}$
17.2 f).....	$\boxed{\frac{n+1}{2n}}$	17.5 c).....	$\boxed{1 - \frac{1}{(n+1)!}}$	17.9 e).....	$\boxed{\frac{n(n+1)}{2} \ln(n!)}$
17.3 a).....	$\boxed{2^{q-p+1}}$	17.5 d).....	$\boxed{(n+1)! - 1}$	17.9 f).....	$\boxed{\frac{n(n+1)(4n-1)}{6}}$
		17.6 a).....	$\boxed{n+1}$		
		17.6 b).....	$\boxed{1 - 4n^2}$		
		17.6 c).....	$\boxed{\frac{1}{n}}$		

Corrigés

17.1 a) On utilise la formule suivante : $\sum_{k=1}^{n+2} n = n \sum_{k=1}^{n+2} 1 = (n+2-1+1) \times n = n(n+2)$.

17.1 b) On utilise la formule présente en prérequis : $\sum_{k=2}^{n+2} 7k = 7 \times \frac{(n+2-2+1)(n+2+2)}{2} = \frac{7(n+1)(n+4)}{2}$.

17.1 c) On utilise la linéarité de la somme :

$$\sum_{k=1}^n (3k + n - 1) = 3 \sum_{k=1}^n k + (n-1) \sum_{k=1}^n 1 = \frac{3n(n+1)}{2} + n(n-1) = \frac{n(5n+1)}{2}.$$

17.1 d) On utilise la linéarité de la somme :

$$\sum_{k=2}^{n-1} \left(\frac{k-4}{3} \right) = \frac{1}{3} \sum_{k=2}^{n-1} (k-4) = \frac{1}{3} \left(\sum_{k=2}^{n-1} k - 4 \sum_{k=2}^{n-1} 1 \right) = \frac{1}{3} \left(\frac{(n-2)(n+1)}{2} - 4(n-2) \right) = \frac{(n-2)(n-7)}{6}.$$

17.2 a) On développe et utilise la linéarité de la somme $\sum_{k=1}^n k(k+1) = \sum_{k=1}^n k^2 + k = \sum_{k=1}^n k^2 + \sum_{k=1}^n k$.

Puis, on utilise la formule suivante : $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. D'où $\sum_{k=1}^n k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$.

17.2 b) On utilise la linéarité de la somme :

$$\sum_{k=0}^n (4k(k^2+2)) = 4 \sum_{k=0}^n k^3 + 8 \sum_{k=0}^n k = 4 \frac{n^2(n+1)^2}{4} + 8 \frac{n(n+1)}{2} = n(n+1)(n(n+1)+4) = n(n+1)(n^2+n+4).$$

17.2 c) On utilise la formule pour les sommes géométriques : on a $\sum_{k=2}^{n-1} 3^k = 3^2 \frac{1-3^{n-1-2+1}}{1-3} = \frac{9}{2}(3^{n-2}-1)$.

17.2 d) On factorise pour faire apparaître une somme géométrique :

$$\sum_{k=0}^n 2^k 5^{n-k} = 5^n \sum_{k=0}^n 2^k 5^{-k} = 5^n \sum_{k=0}^n \left(\frac{2}{5}\right)^k = 5^n \frac{1 - \left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}}{1 - \frac{2}{5}} = 5^{n+1} \frac{1 - \left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}}{3}.$$

17.2 e) On utilise la linéarité de la somme :

$$\sum_{k=1}^n (7^k + 4k - n + 2) = \sum_{k=1}^n 7^k + 4 \sum_{k=1}^n k + (-n+2) \sum_{k=1}^n 1 = 7 \frac{7^n-1}{6} + 4 \frac{n(n+1)}{2} + (-n+2)n = \frac{7}{6}(7^n-1) + n + 4.$$

17.2 f) On utilise la formule suivante : $\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \dots + \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n k = \frac{n+1}{2n}$.

17.3 a) On utilise la formule suivante : $\prod_{k=p}^q 2 = 2 \times \dots \times 2 = 2^{q-p+1}$.

17.3 b) On utilise la formule suivante : $\prod_{k=1}^n 3^k = 3^1 \times 3^2 \times \dots \times 3^n = 3^{1+\dots+n} = 3^{\left(\sum_{k=1}^n k\right)} = 3^{\frac{n(n+1)}{2}}$.

17.3 c) On factorise et on utilise que $\sqrt{k} = k^{\frac{1}{2}}$: on a

$$\prod_{k=1}^n 5\sqrt{k} \times k = 5^n \prod_{k=1}^n k^{\frac{3}{2}} = 5^n \left(\prod_{k=1}^n k\right)^{\frac{3}{2}} = 5^n (n!)^{\frac{3}{2}}.$$

17.3 d) Un produit est nul si l'un des termes est nul.

17.4 a) Avec ce changement ou renversement, on a $k = n+1-j$, les bornes varient alors de n à 1 , on les remet dans le bon ordre. On a $\sum_{k=1}^n n+1-k = \sum_{j=1}^n j = \frac{n(n+1)}{2}$.

17.4 b) On utilise la linéarité de la somme et on effectue ce changement ou renversement dans la seconde. On a $k = n+1-j$, les bornes varient alors de n à 1 , on les remet dans le bon ordre. On a

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+1-k} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \sum_{j=1}^n \frac{1}{j}.$$

17.4 c) Avec le changement d'indice, on a, en notant $S_n = \sum_{k=1}^n k2^k$:

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{j=0}^{n-1} (j+1)2^{j+1} = \sum_{j=0}^{n-1} j2^{j+1} + \sum_{j=0}^{n-1} 2^{j+1} = 2 \sum_{j=0}^{n-1} j2^j + 2 \sum_{j=0}^{n-1} 2^j \\ &= 2 \left[\sum_{j=1}^n j2^j - n2^n \right] + 2 \frac{1-2^n}{1-2} = 2S_n - n2^{n+1} - 2(1-2^n) \end{aligned}$$

D'où $S_n = n2^{n+1} + 2(1-2^n) = (n-1)2^{n+1} + 2$.

17.4 d) On a $\sum_{k=3}^{n+2} (k-2)^3 = \sum_{j=1}^n j^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

17.5 a) On reconnaît une somme télescopique :

$$\sum_{k=2}^{n+2} (k+1)^3 - k^3 = 3^3 - 2^3 + 4^3 - 3^3 + \cdots + (n+3)^3 - (n+2)^3 = (n+3)^3 - 2^3.$$

17.5 b) On calcule :

$$\sum_{k=1}^n \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) = \sum_{k=1}^n \ln(k+1) - \ln(k) = \ln(2) + \cdots + \ln(n+1) - [\ln(1) + \cdots + \ln(n)] = \ln(n+1).$$

17.5 c) En écrivant $k = k+1-1$, on a :

$$\sum_{k=1}^n \frac{k}{(k+1)!} = \sum_{k=1}^n \left[\frac{k+1-1}{(k+1)!} \right] = \sum_{k=1}^n \left[\frac{k+1}{(k+1)!} - \frac{1}{(k+1)!} \right] = \sum_{k=1}^n \left[\frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!} \right] = 1 - \frac{1}{(n+1)!}.$$

17.5 d) En écrivant $k = k+1-1$, on a :

$$\sum_{k=1}^n k \times k! = \sum_{k=1}^n (k+1-1)k! = \sum_{k=1}^n [(k+1) \times k! - k!] = \sum_{k=1}^n [(k+1)! - k!] = (n+1)! - 1.$$

17.6 a) On écrit $\prod_{k=1}^n \frac{k+1}{k} = \frac{2}{1} \times \frac{3}{2} \times \cdots \times \frac{n+1}{n} = \frac{n+1}{1} = n+1$.

17.6 b) Dans cet exemple, il faut aller un terme plus loin pour voir le télescopage :

$$\begin{aligned} \prod_{k=1}^n \frac{2k+1}{2k-1} &= \frac{3}{-1} \times \frac{5}{1} \times \frac{7}{3} \times \cdots \times \frac{2(n-1)+1}{2(n-1)-1} \times \frac{2n+1}{2n-1} \\ &= \frac{2(n-1)+1}{-1} \times \frac{2n+1}{1} = -(2n-2+1)(2n+1) = -(2n-1)(2n+1) = 1-4n^2. \end{aligned}$$

17.6 c) En mettant au même dénominateur : $\prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k}\right) = \prod_{k=2}^n \left(\frac{k-1}{k}\right) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \cdots \times \frac{n-1}{n} = \frac{1}{n}$.

17.6 d) Il faut remarquer l'identité remarquable et faire deux produits télescopiques :

$$\begin{aligned} \prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) &= \prod_{k=2}^n \left(\frac{k^2-1}{k^2}\right) = \prod_{k=2}^n \frac{(k-1)(k+1)}{k \times k} = \left(\prod_{k=2}^n \frac{k-1}{k}\right) \times \left(\prod_{k=2}^n \frac{k+1}{k}\right) \\ &= \left(\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \cdots \times \frac{n-1}{n}\right) \times \left(\frac{3}{2} \times \frac{4}{3} \times \cdots \times \frac{n+1}{n}\right) = \frac{1}{n} \times \frac{n+1}{2} = \frac{n+1}{2n}. \end{aligned}$$

17.7 a) D'après la décomposition en éléments simples, on a $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1}$. En réduisant au même dénominateur et en identifiant, on trouve $a = 1$ et $b = -1$.

D'où $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$, en reconnaissant une somme télescopique.

17.7 b) D'après la décomposition en éléments simples, on a $\frac{1}{(k+2)(k+3)} = \frac{a}{k+2} + \frac{b}{k+3}$. En réduisant au même dénominateur et en identifiant, on trouve $a = 1$ et $b = -1$.

D'où $\sum_{k=0}^n \frac{1}{(k+2)(k+3)} = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+2} - \frac{1}{k+3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{n+3}$, en reconnaissant une somme télescopique.

17.8 a) Séparons les termes d'indices pairs et impairs. On a :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k k^2 &= \sum_{\substack{0 \leq k \leq 2n \\ k \text{ pair}}} (-1)^k k^2 + \sum_{\substack{0 \leq k \leq 2n \\ k \text{ impair}}} (-1)^k k^2 = \sum_{\substack{0 \leq k \leq 2n \\ k \text{ pair}}} k^2 + \sum_{\substack{0 \leq k \leq 2n \\ k \text{ impair}}} (-1)k^2 \\ &= \sum_{p=0}^n (2p)^2 - \sum_{p=0}^{n-1} (2p+1)^2 = \sum_{p=0}^n 4p^2 - \sum_{p=0}^{n-1} (4p^2 + 4p + 1) \\ &= 4 \underbrace{\sum_{p=0}^n p^2 - \sum_{p=0}^{n-1} p^2}_{=4n^2} - 4 \sum_{p=0}^{n-1} p - \sum_{p=0}^{n-1} 1 = 4n^2 - 4 \frac{n(n-1)}{2} - n = 2n^2 + n. \end{aligned}$$

17.8 b) Séparons les termes plus petits que n et les autres. On a :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{2n} \min(k, n) &= \sum_{k=0}^n \min(k, n) + \sum_{k=n+1}^{2n} \min(k, n) \\ &= \sum_{k=0}^n k + \sum_{k=n+1}^{2n} n = \frac{n(n+1)}{2} + n[2n - (n+1) + 1] = \frac{n(n+1)}{2} + n^2 = \frac{n(3n+1)}{2}. \end{aligned}$$

17.9 a) Comme il n'y a que l'indice j dans la somme, nous pouvons factoriser :

$$\sum_{1 \leq i, j \leq n} j = \left(\sum_{j=1}^n j \right) \left(\sum_{j=1}^n 1 \right) = \frac{n(n+1)}{2} n = \frac{n^2(n+1)}{2}.$$

17.9 b) On somme d'abord sur l'indice i ; on calcule donc

$$\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \frac{i}{j} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^j \frac{i}{j} = \sum_{j=1}^n \frac{1}{j} \sum_{i=1}^j i = \sum_{j=1}^n \frac{1}{j} \times \frac{j(j+1)}{2} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n (j+1) = \frac{1}{2} \sum_{k=2}^{n+1} k = \frac{n(n+3)}{4}.$$

Signalons, qu'en revanche, l'autre ordre de sommation ne permettait pas de conclure.

17.9 c) Il faut faire attention à l'inégalité stricte :

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq i < j \leq n} (i+j) &= \sum_{j=2}^n \sum_{i=1}^{j-1} (i+j) = \sum_{j=2}^n \left(\sum_{i=1}^{j-1} i + \sum_{i=1}^{j-1} j \right) = \sum_{j=2}^n \left[\frac{j(j-1)}{2} + j(j-1) \right] \\ &= \sum_{j=2}^n \left[\frac{3}{2}(j^2 - j) \right] = \frac{3}{2} \left(\sum_{j=2}^n j^2 - \sum_{j=2}^n j \right) = \frac{3}{2} \left[\left(\sum_{j=1}^n j^2 \right) - 1 - \left(\sum_{j=1}^n j \right) + 1 \right] \\ &= \frac{3}{2} \left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2} \right] = \frac{3n(n+1)(2n+1-3)}{3 \times 2 \times 2} = \frac{n(n+1)(n-1)}{2} = \frac{n(n^2-1)}{2}. \end{aligned}$$

17.9 d) On développe d'abord puis on choisit l'ordre de sommation qui semble faciliter les calculs :

$$\begin{aligned}
 \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} (i+j)^2 &= \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} (i^2 + 2ij + j^2) = \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} i^2 + 2 \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} ij + \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} j^2 \\
 &= \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=i}^n i^2 \right) + 2 \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^j ij \right) + \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^j j^2 \right) = \sum_{i=1}^n \left(i^2 \sum_{j=i}^n 1 \right) + 2 \sum_{j=1}^n \left(j \sum_{i=1}^j i \right) + \sum_{j=1}^n \left(j^2 \sum_{i=1}^j 1 \right) \\
 &= \sum_{i=1}^n i^2(n-i+1) + 2 \sum_{j=1}^n j \frac{j(j+1)}{2} + \sum_{j=1}^n j^3 = \sum_{i=1}^n [i^2(n+1) - i^3] + \sum_{j=1}^n (j^3 + j^2) + \frac{n^2(n+1)^2}{4} \\
 &= (n+1) \sum_{i=1}^n i^2 - \sum_{i=1}^n i^3 + \sum_{j=1}^n j^3 + \sum_{j=1}^n j^2 + \frac{n^2(n+1)^2}{4} \\
 &= (n+2) \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n^2(n+1)^2}{4} \\
 &= \frac{n(n+1)(7n^2 + 13n + 4)}{12}.
 \end{aligned}$$

17.9 e) On calcule :

$$\sum_{1 \leq i, j \leq n} \ln(i^j) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} j \ln(i) = \left(\sum_{j=1}^n j \right) \left(\sum_{i=1}^n \ln(i) \right) = \frac{n(n+1)}{2} \ln \left(\prod_{i=1}^n i \right) = \frac{n(n+1)}{2} \ln(n!).$$

17.9 f) On fait une sommation par paquets :

$$\begin{aligned}
 \sum_{1 \leq i, j \leq n} \max(i, j) &= \sum_{1 \leq i < j \leq n} \max(i, j) + \sum_{1 \leq j < i \leq n} \max(i, j) + \sum_{1 \leq j = i \leq n} \max(i, j) \\
 &= \sum_{1 \leq i < j \leq n} j + \sum_{1 \leq j < i \leq n} i + \sum_{i=1}^n i \\
 &= 2 \sum_{j=2}^n \sum_{i=1}^{j-1} j + \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{par symétrie} \\
 &= 2 \sum_{j=2}^n j(j-1) + \frac{n(n+1)}{2} = 2 \sum_{j=1}^n j(j-1) + \frac{n(n+1)}{2} \\
 &= 2 \left[\sum_{j=1}^n j^2 - \sum_{j=1}^n j \right] + \frac{n(n+1)}{2} = 2 \left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2} \right] + \frac{n(n+1)}{2} \\
 &= \frac{n(n+1)}{6} (4n+2-6+3) = \frac{n(n+1)(4n-1)}{6}.
 \end{aligned}$$

Fiche n° 18. Coefficients binomiaux

Réponses

18.1 a).....	$\boxed{10\,100}$	18.3 b).....	$\boxed{\frac{n(n-1)(n-2)}{6}}$	18.5 d).....	$\boxed{12 \times 15^n}$
18.1 b).....	$\boxed{720}$	18.3 c).....	$\boxed{\frac{k+1}{n-k}}$	18.6 a).....	$\boxed{2 \times \sum_{p=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2p}}$
18.1 c).....	$\boxed{\frac{1}{30}}$	18.3 d).....	$\boxed{(n+2)(n+1)}$	18.6 b).....	$\boxed{2^{n-1}}$
18.1 d).....	$\boxed{15}$	18.3 e).....	$\boxed{\frac{1}{(n+1)!}}$	18.7 a).....	$\boxed{2^n}$
18.1 e).....	$\boxed{56}$	18.3 f).....	$\boxed{\frac{n! \times (n-3)}{2^{2n+2}}}$	18.7 b).....	$\boxed{n2^{n-1}}$
18.1 f).....	$\boxed{140}$	18.4 a).....	$\boxed{\frac{(n+1)^3}{n \times (n+2)!}}$	18.7 c).....	$\boxed{n(n+1)2^{n-2}}$
18.2 a).....	$\boxed{\frac{9!}{5!}}$	18.4 b).....	$\boxed{\frac{3(3n+2)(3n+1)}{a^3(n+1)^2}}$	18.7 d).....	$\boxed{\frac{2^{n+1} - 1}{n+1}}$
18.2 b).....	$\boxed{\binom{9}{4}}$	18.5 a).....	$\boxed{3^n}$	18.8 a).....	$\boxed{\binom{2n}{n}}$
18.2 c).....	$\boxed{2^n \times n!}$	18.5 b).....	$\boxed{0}$	18.8 b).....	$\boxed{\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2}$
18.2 d).....	$\boxed{\frac{(2n+1)!}{2^n \times n!}}$	18.5 c).....	$\boxed{6^n}$	18.8 c).....	$\boxed{\binom{2n}{n}}$
18.3 a).....	$\boxed{\frac{n(n-1)}{2}}$				

Corrigés

18.1 a) On calcule : $\frac{101!}{99!} = \frac{101 \times 100!}{99!} = \frac{101 \times 100 \times 99!}{99!} = 101 \times 100 = 10100$.

18.1 b) On calcule : $\frac{10!}{7!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7!}{7!} = 10 \times 9 \times 8 = 720$.

18.1 c) On calcule : $\frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} = \frac{5}{5 \times 4!} - \frac{1}{5!} = \frac{5-1}{5!} = \frac{4}{5!} = \frac{4}{5 \times 4 \times 3 \times 2} = \frac{1}{30}$.

18.1 d) On calcule : $\binom{6}{2} = \frac{6!}{2! \times 4!} = \frac{6 \times 5 \times 4!}{2 \times 4!} = \frac{6 \times 5}{2} = 15$.

18.1 e) On calcule : $\binom{8}{3} = \frac{8!}{3! \times 5!} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5!}{3! \times 5!} = \frac{8 \times 7 \times 6}{2 \times 3} = 8 \times 7 = 56$.

18.1 f) On calcule : $4 \times \binom{7}{4} = 4 \times \frac{7!}{4! \times 3!} = \frac{4 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3!}{4 \times 3! \times 3!} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4}{2 \times 3} = 140$.

18.2 a) Par définition, $9! = (2 \times 3 \times 4 \times 5) \times 6 \times 7 \times 8 \times 9 = 5! \times 6 \times 7 \times 8 \times 9$. Donc, $6 \times 7 \times 8 \times 9 = \frac{9!}{5!}$.

18.2 b) Comme pour le calcul précédent, on a $6 \times 7 \times 8 \times 9 = \frac{9!}{5!}$. Or, $2 \times 3 \times 4 = 4!$. Ainsi,

$$\frac{6 \times 7 \times 8 \times 9}{2 \times 3 \times 4} = \frac{9!}{5!} \times \frac{1}{4!} = \binom{9}{4} = \binom{9}{5}.$$

18.2 c) On peut mettre 2 en facteur de chaque nombre du produit $2 \times 4 \times 6 \times \dots \times (2n)$, produit qui contient n facteurs. Ainsi,

$$2 \times 4 \times 6 \times \dots \times (2n) = 2^n \times (1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n) = 2^n \times n!.$$

18.2 d) On multiplie le produit $3 \times 5 \times 7 \times \dots \times (2n+1)$ par le produit $2 \times 4 \times 6 \times \dots \times (2n)$ de la question précédente. On obtient ainsi le produit de tous les entiers compris entre 2 et $(2n+1)$. Il s'agit donc de $(2n+1)!$.

Donc, on a

$$3 \times 5 \times 7 \times \dots \times (2n+1) = \frac{(2n+1)!}{2 \times 4 \times 6 \times \dots \times (2n)} = \frac{(2n+1)!}{2^n \times n!}.$$

18.3 a) Par définition, $\binom{n}{2} = \frac{n!}{2! \times (n-2)!} = \frac{n \times (n-1) \times (n-2)!}{2! \times (n-2)!} = \frac{n(n-1)}{2}.$

18.3 b) Par définition, $\binom{n}{3} = \frac{n!}{3! \times (n-3)!} = \frac{n \times (n-1) \times (n-2) \times (n-3)!}{3! \times (n-3)!} = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}.$

18.3 c) On calcule

$$\begin{aligned} \frac{\binom{n}{k}}{\binom{n}{k+1}} &= \frac{\frac{n!}{k! \times (n-k)!}}{\frac{n!}{(k+1)! \times (n-(k+1))!}} = \frac{n!}{k! \times (n-k)!} \times \frac{(k+1)! \times (n-(k+1))!}{n!} \\ &= \frac{(k+1) \times k! \times (n-k-1)!}{k! \times (n-k) \times (n-k-1)!} = \frac{k+1}{n-k}. \end{aligned}$$

18.3 d) On calcule $\frac{(n+2)!}{n!} = \frac{(n+2) \times (n+1) \times n!}{n!} = (n+2)(n+1).$

18.3 e) On réduit au même dénominateur $\frac{1}{n!} - \frac{n}{(n+1)!} = \frac{n+1}{(n+1) \times n!} - \frac{n}{(n+1)!} = \frac{(n+1) - n}{(n+1)!} = \frac{1}{(n+1)!}.$

18.3 f) On réduit au même dénominateur

$$\frac{(n+1)!}{2^{2(n+1)}} - \frac{n!}{2^{2n}} = \frac{(n+1)!}{2^{2n+2}} - \frac{2^2 \times n!}{2^2 \times 2^{2n}} = \frac{(n+1)! - 4 \times n!}{2^{2n+2}} = \frac{(n+1) \times n! - 4 \times n!}{2^{2n+2}} = \frac{n! \times (n-3)}{2^{2n+2}}.$$

18.4 a) On met chaque terme au même dénominateur, à savoir $2n(n+2)!$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{n!} &= \frac{2n(n+1)(n+2)}{n! \times 2n(n+1)(n+2)} \\ \frac{1}{2n \times (n+1)!} &= \frac{n+2}{2n \times (n+1)! \times (n+2)} \\ \text{et} \quad \frac{1}{2 \times (n+2)!} &= \frac{n}{2 \times (n+2)! \times n}. \end{aligned}$$

D'où,

$$\begin{aligned} \frac{1}{n!} + \frac{1}{2n \times (n+1)!} + \frac{1}{2 \times (n+2)!} &= \frac{2n(n+1)(n+2) + n+2 + n}{2n \times (n+2)!} \\ &= \frac{2(n+1)(n(n+2)+1)}{2n \times (n+2)!} = \frac{(n+1)(n^2+2n+1)}{n(n+2)!}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\frac{1}{n!} + \frac{1}{2n \times (n+1)!} + \frac{1}{2 \times (n+2)!} = \frac{(n+1)^3}{n \times (n+2)!}.$$

18.4 b) On a

$$\frac{(3(n+1))!}{a^{3(n+1)} \times ((n+1)!)^3} \div \frac{(3n)!}{a^{3n} \times (n!)^3} = \frac{(3n+3)!}{a^{3n+3} \times ((n+1)!)^3} \times \frac{a^{3n} \times (n!)^3}{(3n)!}.$$

Or,

$$\begin{aligned} (3n+3)! &= (3n+3) \times (3n+2) \times (3n+1) \times (3n)! \\ a^{3n+3} &= a^{3n} \times a^3 \\ ((n+1)!)^3 &= ((n+1) \times n!)^3 = (n+1)^3 \times (n!)^3. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \frac{(3(n+1))!}{a^{3(n+1)} \times ((n+1)!)^3} \div \frac{(3n)!}{a^{3n} \times (n!)^3} &= \frac{(3n+3)(3n+2)(3n+1)}{a^3 \times (n+1)^3} \\ &= \frac{3(n+1)(3n+2)(3n+1)}{a^3 \times (n+1)^3} = \frac{3(3n+2)(3n+1)}{a^3(n+1)^2}. \end{aligned}$$

18.5 a) On constate que $\sum_{k=0}^n 2^k \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^k \times 1^{n-k} = (2+1)^n = 3^n$.

18.5 b) On constate que

$$\sum_{k=0}^n (-1)^{k+1} \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^n (-1) \times \binom{n}{k} (-1)^k \times 1^{n-k} = -1 \times \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k \times 1^{n-k} = (-1) \times (-1+1)^n = 0.$$

18.5 c) On calcule $\sum_{k=0}^n 2^{2n-k} \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^n 2^n \times 2^{n-k} \binom{n}{k} = 2^n \times \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^{n-k} \times 1^k = 2^n \times (1+2)^n = 2^n \times 3^n = 6^n$.

18.5 d) On calcule

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n 2^{k+2} \binom{n}{k} \times 3^{2n-k+1} &= \sum_{k=0}^n 2^2 \times 2^k \times \binom{n}{k} \times 3^{n+1} \times 3^{n-k} \\ &= 4 \times 3^{n+1} \times \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^k \times 3^{n-k} \\ &= 4 \times 3^{n+1} \times (2+3)^n = 4 \times 3^{n+1} \times 5^n = 4 \times 3 \times 3^n \times 5^n = 12 \times 15^n. \end{aligned}$$

18.6 a) On développe $(1+1)^n + (1-1)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} + \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (1 + (-1)^k)$.

Or, $1 + (-1)^k = 2$ si k est pair et $1 + (-1)^k = 0$ si k est impair. Ainsi, on notant $P = \{k \in \mathbb{N}, 0 \leq k \leq n \text{ et } k \text{ pair}\}$, on a

$$(1+1)^n + (1-1)^n = \sum_{k \in P} \binom{n}{k} \times 2 = 2 \times \sum_{k \in P} \binom{n}{k}.$$

Or, si $k \in P$, il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $k = 2p$. Comme $0 \leq k \leq n$, on a alors $0 \leq 2p \leq n$ et donc $0 \leq p \leq \frac{n}{2}$.

Comme $p \in \mathbb{N}$, on peut aussi écrire $0 \leq p \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.

Ainsi,

$$\sum_{k \in P} \binom{n}{k} = \sum_{p=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2p} \quad \text{et} \quad (1+1)^n + (1-1)^n = 2 \times \sum_{p=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2p}.$$

18.6 b) On déduit de la première question que $\sum_{p=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2p} = \frac{1}{2}((1+1)^n + (1-1)^n) = 2^{n-1}$.

18.7 a) On développe $(1+x)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k$. On évalue en $x=1$ pour obtenir $(1+1)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$.

Ainsi, $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$.

18.7 b) On dérive par rapport à x la relation $(1+x)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k$.

On obtient $n(1+x)^{n-1} = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \times k \times x^{k-1}$.

On évalue en $x=1$ pour obtenir $n(1+1)^{n-1} = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \times k$. Ainsi, $\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \times k = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \times k = n2^{n-1}$.

18.7 c) On dérive deux fois par rapport à x la relation $(1+x)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k$.

On obtient $n(n-1)(1+x)^{n-2} = \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} \times k \times (k-1) \times x^{k-2}$.

On évalue en $x=1$ pour obtenir $n(n-1)(1+1)^{n-2} = \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} \times k \times (k-1)$. Ainsi, $\sum_{k=2}^n \binom{n}{k} \times k \times (k-1) = n(n-1)2^{n-2}$.

Or, par linéarité, on a $\sum_{k=2}^n \binom{n}{k} \times k \times (k-1) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \times k \times (k-1) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \times k^2 - \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \times k$. Donc,

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \times k^2 = \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} \times k \times (k-1) + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \times k = n(n-1)2^{n-2} + n2^{n-1} = n(n+1)2^{n-2}.$$

18.7 d) On intègre entre 0 et x la relation $(1+x)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k$. On obtient

$$\frac{1}{n+1}(1+x)^{n+1} - \frac{1}{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \times \frac{1}{k+1} x^{k+1}.$$

On évalue en $x=1$ pour obtenir

$$\frac{1}{n+1}(1+1)^{n+1} - \frac{1}{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \times \frac{1}{k+1}.$$

Ainsi, $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \times \frac{1}{k+1} = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}$.

18.8 a) On développe $(1+x)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} x^k$. Ainsi, le coefficient de x^n vaut $\binom{2n}{n}$.

18.8 b) On obtient une contribution en x^n dans le produit $(1+x)^n(1+x)^n$ à chaque fois que l'on multiplie un terme de la forme $a_k x^k$ dans le premier facteur avec un terme de la forme $b_{n-k} x^{n-k}$ dans le deuxième facteur, et ce pour toutes les valeurs de k entières naturelles et inférieures ou égales à n . Or, $(1+x)^n \times (1+x)^n = \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k \right) \times \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} \right)$.

Donc, le coefficient de x^n vaut $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2$.

18.8 c) On déduit, en comparant les réponses aux questions précédentes, que $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$.

Fiche n° 19. Manipulation des fonctions usuelles

Réponses

19.1 a)	$\frac{\pi}{6}$	19.2 d)	$\frac{\ln(4)}{\ln(20/3)}$	19.3 d)	$\frac{\ln\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)}{\ln(3)}$
19.1 b)	$\frac{\pi}{4}$	19.3 a)	$\frac{\ln\left(\frac{\sqrt{17}-1}{2}\right)}{\ln(2)}$	19.4 a) ...	$x \mapsto \ln(2) \times 2^x + 2x$
19.2 a)	$\frac{\ln(2)}{\ln(3)}$	19.3 b)	$\left\{0; \frac{1}{2}\right\}$	19.4 b).	$x \mapsto \frac{15^x \ln(3/5) + 3^x \ln(3)}{(5^x + 1)^2}$
19.2 b)	1	19.3 c)	$1 - \frac{\ln(2)}{\ln(3)}$	19.4 c)	$x \mapsto (\ln(x) + 1)x^x$
19.2 c)	$-\frac{\ln(3)}{\ln(2)}$				

Corrigés

19.1 a) On remarque que $\arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \arctan\left(\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right) = \frac{\pi}{6}$.

19.2 a) Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors on a les équivalences $3^x = \frac{9^x}{2} \Leftrightarrow \ln(3^x) = \ln\left(\frac{9^x}{2}\right) \Leftrightarrow x \ln(3) = 2x \ln(3) - \ln(2) \Leftrightarrow x = \frac{\ln(2)}{\ln(3)}$.

19.2 b) Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors on a les équivalences $4^x = 2 \times 2^x \Leftrightarrow 2x \ln(2) = (x+1) \ln(2) \Leftrightarrow 2x = x+1 \Leftrightarrow x = 1$.

19.2 c) Soit $x \in \mathbb{R}$.

Alors on a l'équivalence $2^x = 3 \cdot 4^x \Leftrightarrow x \ln(2) = \ln(3) + 2x \ln(2) \Leftrightarrow x = -\frac{\ln(3)}{\ln(2)}$.

19.2 d) Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors

$$10^{2x} = 4 \times 5^x \times 9^{\frac{x}{2}} \Leftrightarrow \ln(10^{2x}) = \ln(4 \times 5^x \times 9^{\frac{x}{2}}) \Leftrightarrow 2x \ln(10) = \ln(4) + x \ln(5) + \frac{x}{2} \ln(9) \\ \Leftrightarrow x \left(2 \ln(5) + 2 \ln(2) - \ln(5) - \frac{2 \ln(3)}{2} \right) = \ln(4) \Leftrightarrow x = \frac{\ln(4)}{2 \ln(2) + \ln(5) - \ln(3)} = \frac{\ln(4)}{\ln(20/3)}.$$

19.3 a) Soit $x \in \mathbb{R}$. Posons $X = 2^x$. Alors $2^x + 4^x = 4 \Leftrightarrow X + X^2 - 4 = 0$. Cette équation a pour discriminant $1 + 16 = 17$, d'où deux racines, $\frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$. Seule la racine $\frac{\sqrt{17}-1}{2}$ est positive, donc $2^x + 4^x = 4 \Leftrightarrow 2^x = \frac{\sqrt{17}-1}{2} \Leftrightarrow x \ln(2) = \ln\left(\frac{\sqrt{17}-1}{2}\right) \Leftrightarrow x = \frac{\ln\left(\frac{\sqrt{17}-1}{2}\right)}{\ln(2)}$.

19.3 b) Soit $x \in \mathbb{R}$. Notons $X = 4^x$. Alors $16^x - 3 \times 4^x + 2 = 0 \Leftrightarrow X^2 - 3X + 2 = 0 \Leftrightarrow (X-1)(X-2) = 0 \Leftrightarrow 4^x = 1$ ou $4^x = 2 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = \frac{1}{2}$.

19.3 c) Soit $x \in \mathbb{R}$. Posons $X = 3^x$.

Alors on a l'équivalence $2 \times 9^x - 3^x - 3 = 0 \Leftrightarrow 2X^2 - X - 3 = 0$. Cette équation a pour discriminant $1 + 4 \times 2 \times 3 = 25$, donc les deux solutions de l'équation sont $\frac{1 \pm 5}{4}$, i.e. $\frac{3}{2}$ et -1 . La seule solution positive est $\frac{3}{2}$, donc $2 \times 9^x - 3^x - 3 \Leftrightarrow 3^x = \frac{3}{2} \Leftrightarrow x \ln(3) = \ln(3) - \ln(2) \Leftrightarrow x = 1 - \frac{\ln(2)}{\ln(3)}$.

19.3 d) Soit $x \in \mathbb{R}$. Posons $X = 3^x$.

Alors on a l'équivalence $3^x + 3^{2x} - 1 = 0 \Leftrightarrow X^2 + X - 1 = 0$. Cette équation a pour discriminant $1 + 4 = 5$, donc les deux solutions de l'équation sont $\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$. La seule solution positive est $\frac{\sqrt{5} - 1}{2}$, donc $3^x + 3^{2x} - 1 = 0 \Leftrightarrow 3^x = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \Leftrightarrow x \ln(3) = \ln\left(\frac{\sqrt{5} - 1}{2}\right)$.

19.4 a) On n'oublie pas que $2^x = e^{x \ln(2)}$. Donc la dérivée de $x \mapsto 2^x$ est $x \mapsto \ln(2) \cdot 2^x$.

19.4 c) On écrit que $x^x = e^{x \ln(x)}$. Ainsi la dérivée de la fonction est $x \mapsto (\ln(x) + 1)e^{x \ln(x)}$.

Fiche n° 20. Suites numériques

Réponses

20.1 a) $\frac{12}{5}$

20.1 b) 8

20.1 c) $\frac{(2n+5) \cdot 2^{n+3}}{5}$

20.1 d) $\frac{3(2n+1) \cdot 2^{3n+2}}{5}$

20.2 a) 13

20.2 b) 29

20.3 a) $2^{\frac{1}{8}}$

20.3 b) $2^{\frac{1}{64}}$

20.4 a) 2

20.4 b) 2

20.5 a) $2n \ln(n)$

20.5 b) $4n \ln(2n)$

20.6 a) 21

20.6 b) 10 000

20.6 c) 2 001

20.6 d) 10 201

20.7 a) $\frac{17}{24}$

20.7 b) $\frac{1}{24}$

20.8 a) $\frac{3}{512}$

20.8 b) $\frac{3069}{512}$

20.8 c) $\frac{3}{1\,024}$

20.8 d) $\frac{6141}{1024}$

20.9 a) $\frac{\pi\sqrt{5}}{5}$

20.9 b) $\frac{11\sqrt{5}}{25}$

20.10 a) $3^n + (-2)^n$

20.10 b) 211

20.11 a) .. $\frac{(1+\sqrt{2})^n - (1-\sqrt{2})^n}{2}$

20.11 b) $2\sqrt{2}$

20.12 a) 257

20.12 b) 65 537

20.12 c) F_n

20.12 d) $F_{n+1} - 2$

20.12 e) $F_{n+1} + 2^{2^{n+1}}$

20.12 f) F_{n+2}

Corrigés

20.1 a) $u_0 = \frac{2 \times 0 + 3}{5} \times 2^{0+2} = \frac{12}{5}.$

20.1 b) $u_1 = \frac{2 \times 1 + 3}{5} \times 2^{1+2} = \frac{5}{5} \times 8 = 8.$

20.1 c) $u_n = \frac{2(n+1) + 3}{5} \times 2^{(n+1)+2} = \frac{(2n+5) \cdot 2^{n+3}}{5}.$

20.1 d) $u_{3n} = \frac{2 \times 3n + 3}{5} \times 2^{3n+2} = \frac{3(2n+1) \cdot 2^{3n+2}}{5}$

20.2 a) $u_1 = 2 \times 1 + 3 = 5$ et $u_2 = 2 \times 5 + 3 = 13.$

20.2 b) On calcule : $u_3 = 2 \times 13 + 3 = 29.$

20.3 a) $v_3 = \sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}} = 2^{\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}} = 2^{\frac{1}{2^3}} = 2^{\frac{1}{8}}.$

20.3 b) $v_6 = 2^{(\frac{1}{2})^6} = 2^{\frac{1}{2^6}} = 2^{\frac{1}{64}}.$

20.4 a) $w_1 = \frac{1}{2} \times 2^2 = \frac{4}{2} = 2$ et, de même, $w_2 = 2.$

20.4 b) Il faudrait formaliser une preuve par récurrence.

20.5 a) $t_{2n} = \ln((2n)^{2n}) - \ln(2^{2n}) = 2n \ln(2) + 2n \ln(n) - 2n \ln(2) = 2n \ln(n).$

20.5 b) $t_{4n} = \ln((4n)^{4n}) - \ln(2^{4n}) = 8n \ln(2) + 4n \ln(n) - 4n \ln(2) = 4n \ln(2) + 4n \ln(n) = 4n \ln(2n).$

20.6 a) $a_{100} = a_0 + 100 \times 2 = 201.$

20.6 b) $s_{100} = \frac{100 \times (1 + 199)}{2} = \frac{100 \times 200}{2} = 100^2 = 10\,000.$

20.6 c) $a_{1\,000} = 1 + 1\,000 \times 2 = 2\,001.$

20.6 d) $s_{101} = \frac{101 \times (1 + 201)}{2} = \frac{101 \times 202}{2} = 101^2 = 10\,201.$

20.7 a) $b_{102} = \frac{b_{101} + b_{103}}{2} = \frac{\frac{2}{3} + \frac{3}{4}}{2} = \frac{\frac{8+9}{12}}{2} = \frac{17}{24}.$

20.7 b) $r = u_{102} - u_{101} = \frac{17}{24} - \frac{2}{3} = \frac{1}{24}.$

20.8 a) $g_9 = 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^9 = \frac{3}{2^9} = \frac{3}{512}.$

20.8 b) $\sigma_{10} = g_0 \times \frac{1 - \frac{1}{2^{10}}}{1 - \frac{1}{2}} = 6 \frac{2^{10} - 1}{2^{10}} = \frac{3 \times 1\,023}{512} = \frac{3\,069}{512}.$

20.8 c) $g_{10} = g_0 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{10} = 3 \times \frac{1}{2^{10}} = \frac{3}{1\,024}.$

20.8 d) $\sigma_{11} = 6 \frac{2^{11} - 1}{2^{11}} = \frac{3 \times 2\,047}{1\,024} = \frac{6\,141}{1\,024}.$

20.9 a) $h_{12} = \sqrt{h_{11} \times h_{13}} = \sqrt{\frac{5\pi \times 11\pi}{11 \times 25}} = \sqrt{\frac{\pi^2}{5}} = \frac{\pi\sqrt{5}}{5}.$

20.9 b) $r = \frac{h_{12}}{h_{11}} = \frac{\frac{\pi\sqrt{5}}{5}}{\frac{5\pi}{11}} = \frac{\pi\sqrt{5} \times 11}{5 \times 5\pi} = \frac{11\sqrt{5}}{25}.$

20.10 a) L'équation caractéristique est $r^2 - r - 6 = 0$ dont les racines sont 3 et -2 . Ainsi $u_n = \alpha 3^n + \beta(-2)^n$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Les conditions initiales conduisent au système linéaire $\begin{cases} \alpha + \beta = 1 \\ 3\alpha - 2\beta = 1 \end{cases}$ dont les solutions sont $\alpha = \beta = 1$.

20.10 b) D'après le a) : $u_5 = 3^5 + (-2)^5 = 3^5 - 2^5 = 211.$

20.11 a) L'équation caractéristique est ici $r^2 - 2r - 1 = 0$. Ses racines sont $1 + \sqrt{2}$ et $1 - \sqrt{2}$ et $v_n = \lambda 3^n + \mu(-2)^n$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Les conditions initiales donnent ici $\lambda = \frac{1}{2}$ et $\mu = -\frac{1}{2}$.

20.11 b) Le plus simple (pour un si petit indice) est d'utiliser la relation de récurrence de la suite : $v_2 = 2v_1 + v_0 = 2\sqrt{2}$. Pour travailler les identités remarquables, d'après le a) : $v_2 = \frac{(1 + \sqrt{2})^2 - (1 - \sqrt{2})^2}{2} = \frac{3 + 2\sqrt{2} - (3 - 2\sqrt{2})}{2} = 2\sqrt{2}.$

20.12 a) $F_3 = 2^{2^3} + 1 = 2^8 + 1 = 257.$

20.12 b) $F_5 = 2^{2^4} + 1 = 2^{16} + 1 = 65\,537.$

$$\text{20.12 c)} \quad (F_{n-1} - 1)^2 + 1 = \left(2^{2^{n-1}}\right)^2 + 1 = 2^{2^{n-1} \times 2} + 1 = 2^{2^n} + 1 = F_n.$$

$$\text{20.12 d)} \quad F_n \times (F_n - 2) = \left(2^{2^n} + 1\right)\left(2^{2^n} - 1\right) = \left(2^{2^{n+1}} - 1\right) = F_{n+1} - 2.$$

$$\text{20.12 e)} \quad F_n^2 = \left(2^{2^n} + 1\right)^2 = \left(2^{2^n}\right)^2 + 2 \cdot 2^{2^n} + 1 = 2^{2^{n+1}} + 1 + 2^{2^n+1} = F_{n+1} + 2^{2^n+1}.$$

$$\text{20.12 f)} \quad F_{n+1}^2 - 2(F_n - 1)^2 = F_{n+2} + 2 \cdot 2^{2^{n+1}} - 2(F_{n+1} - 1) = F_{n+2} + 2 \cdot 2^{2^{n+1}} - 2 \cdot 2^{2^n+1} = F_{n+2}.$$

Fiche n° 21. Développements limités

Réponses

- 21.1 a) $3x - x^2 + \frac{x^3}{2} - \frac{x^4}{2} + o_{x \rightarrow 0}(x^4)$
- 21.1 b) $x - \frac{3}{2}x^2 + \frac{11}{6}x^3 - \frac{25}{12}x^4 + o_{x \rightarrow 0}(x^4)$
- 21.1 c) $x + x^2 + \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{30} - \frac{x^6}{90} + o_{x \rightarrow 0}(x^6)$
- 21.2 a) $e - \frac{ex}{2} + \frac{11ex^2}{24} - \frac{7ex^3}{16} + \frac{2447ex^4}{5760} + o_{x \rightarrow 0}(x^5)$
- 21.2 b) $1 - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{96}x^4 - \frac{19}{5760}x^6 + o_{x \rightarrow 0}(x^7)$
- 21.2 c) $1 - x + \frac{3}{2}(x-1)^2 + o_{x \rightarrow 1}((x-1)^2)$
- 21.3 a) $1 - \frac{3\pi^2}{8}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^2 + o_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}}\left(\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^2\right)$
- 21.3 b) $1 + 2\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 + \frac{8}{3}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^3 + o_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}}\left(\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^4\right)$
- 21.3 c) $-1 + \frac{\pi^2}{8}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^4 - \frac{\pi^2}{48}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^6 + o_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}}\left(\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^7\right)$
- 21.4 a) $-\frac{1}{2x} + \frac{1}{12} - \frac{1}{720}x^2 + o_{x \rightarrow 0}(x^2)$
- 21.4 b) $\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3} + \frac{5}{6x^4} - \frac{5}{6x^5} + o_{x \rightarrow +\infty}\left(\frac{1}{x^6}\right)$
- 21.4 c) $-\ln(x) + 1 - \frac{1}{2x} + \frac{1}{3x^2} - \frac{1}{4x^3} + o_{x \rightarrow +\infty}\left(\frac{1}{x^3}\right)$
- 21.4 d) $e^{-\frac{1}{2}}\left(e^x + \frac{e^x}{3x} - \frac{7e^x}{36x^2}\right) + o_{x \rightarrow +\infty}\left(\frac{e^x}{x^2}\right)$

Corrigés

21.1 a) Il suffit d'effectuer la somme des parties régulières des développements limités à l'ordre 4 en 0 de $\sin(x)$ et $\ln(1+x)$. On écrit donc $f(x) = 2\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o_{x \rightarrow 0}(x^4)\right) + x - \frac{x^3}{6} + o_{x \rightarrow 0}(x^4) = 3x - x^2 + \frac{x^3}{2} - \frac{x^4}{2} + o_{x \rightarrow 0}(x^4)$.

21.1 b) Il suffit d'effectuer le produit des parties régulières des développements limités à l'ordre 4 en 0 de $\ln(1+x)$ et $\frac{1}{x+1}$ et de ne conserver que les termes de degré au plus 4. Observez que le développement limité à l'ordre 3 de $\frac{1}{x+1}$ suffit puisque celui de $\ln(1+x)$ à son terme constant nul. On écrit donc

$$f(x) = \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o_{x \rightarrow 0}(x^4)\right) \left(1 - x + x^2 - x^3 + o_{x \rightarrow 0}(x^3)\right) = x - \frac{3}{2}x^2 + \frac{11}{6}x^3 - \frac{25}{12}x^4 + o_{x \rightarrow 0}(x^4).$$

21.1 c) Il suffit d'écrire :

$$e^x \sin(x) = \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + o_{x \rightarrow 0}(x^5)\right) \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o_{x \rightarrow 0}(x^6)\right) = x + x^2 + \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{30} - \frac{x^6}{90} + o_{x \rightarrow 0}(x^6).$$

21.2 a) En utilisant les développements limités en 0 de $\ln(1+x)$ (à l'ordre 5) et de l'exponentielle (à l'ordre 4), on a :

$$(1+x)^{\frac{1}{x}} = \exp\left(\frac{\ln(1+x)}{x}\right) = \exp\left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + \frac{x^4}{5} + o_{x \rightarrow 0}(x^5)\right) = e \exp\left(-\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + \frac{x^4}{5} + o_{x \rightarrow 0}(x^5)\right).$$

$$\text{Puis : } (1+x)^{\frac{1}{x}} = e \left(1 + \left(-\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + \frac{x^4}{5}\right) + \frac{1}{2}\left(-\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4}\right)^2 + \frac{1}{6}\left(-\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3}\right)^3 + \frac{1}{24}\left(-\frac{x}{2}\right)^4\right) + o_{x \rightarrow 0}(x^5).$$

Observez qu'il n'est pas utile de faire apparaître tous les termes de la partie régulière du développement limité de $\frac{\ln(1+x)}{x}$ selon la puissance à laquelle on la considère.

$$\text{D'où : } (1+x)^{\frac{1}{x}} = e - \frac{ex}{2} + \frac{11ex^2}{24} - \frac{7ex^3}{16} + \frac{2447ex^4}{5760} + o_{x \rightarrow 0}(x^5).$$

21.2 b) On a

$$\begin{aligned} \cos(x) &= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + o_{x \rightarrow 0}(x^7) \\ \sqrt{u} &= 1 + \frac{1}{2}(u-1) - \frac{1}{8}(u-1)^2 + \frac{1}{16}(u-1)^3 + o_{u \rightarrow 1}((u-1)^4) \end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned} \sqrt{\cos(x)} &= 1 + \frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720}\right) - \frac{1}{8}\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right)^2 + \frac{1}{16}\left(-\frac{x^2}{2}\right)^3 + o_{x \rightarrow 0}(x^7) \\ &= 1 - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{96}x^4 - \frac{19}{5760}x^6 + o_{x \rightarrow 0}(x^7). \end{aligned}$$

21.2 c) Etablir l'existence et donner le développement limité de $f(x) = \frac{\ln(2-x)}{x^2}$, en 1 à l'ordre 2, revient à le faire, en 0 à l'ordre 2, pour l'application g définie par $g(t) = f(1+t) = \frac{\ln(1-t)}{(1+t)^2}$. Or $\ln(1-t) = -t - \frac{t^2}{2} + o_{t \rightarrow 0}(t^2)$ et $\frac{1}{(1+t)^2} = \left(1 - t + o_{t \rightarrow 0}(t)\right)^2 = 1 - 2t + o_{t \rightarrow 0}(t)$. D'où $g(t) = \left(-t - \frac{t^2}{2} + o_{t \rightarrow 0}(t^2)\right) \left(1 - 2t + o_{t \rightarrow 0}(t)\right) = -t + \frac{3}{2}t^2 + o_{t \rightarrow 0}(t^2)$ et $f(x) = g(x-1) = 1 - x + \frac{3}{2}(x-1)^2 + o_{x \rightarrow 1}((x-1)^2)$.

21.3 a) La formule de Taylor-Young affirme que $\cos(x) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + o_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ (observez que l'ordre 1 sera suffisant !) et

$$\sin(t) = 1 - \frac{1}{2}\left(t - \frac{\pi}{2}\right)^2 + o_{t \rightarrow \frac{\pi}{2}}\left(\left(t - \frac{\pi}{2}\right)^2\right). \text{ D'où } \sin(\pi \cos(x)) = 1 - \frac{3\pi^2}{8}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^2 + o_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}}\left(\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^2\right)$$

21.3 b) On sait que $\tan(t) = t + \frac{t^3}{3} + \underset{t \rightarrow 0}{\mathcal{O}(t^4)}$. Ainsi,

$$\begin{aligned}\tan\left(t + \frac{\pi}{4}\right) &= \frac{1 + \tan(t)}{1 - \tan(t)} = \frac{1 + t + \frac{t^3}{3} + \underset{t \rightarrow 0}{\mathcal{O}(t^4)}}{1 - t - \frac{t^3}{3} + \underset{t \rightarrow 0}{\mathcal{O}(t^4)}} = \left(1 + t + \frac{t^3}{3} + \underset{t \rightarrow 0}{\mathcal{O}(t^4)}\right) \left(1 + t + t^2 + \frac{4}{3}t^3 + \underset{t \rightarrow 0}{\mathcal{O}(t^4)}\right) \\ &= 1 + 2t + 2t^2 + \frac{8}{3}t^3 + \underset{t \rightarrow 0}{\mathcal{O}(t^4)}.\end{aligned}$$

D'où finalement $\tan(x) = 1 + 2\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 + \frac{8}{3}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^3 + \underset{x \rightarrow \frac{\pi}{4}}{\mathcal{O}\left(\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^4\right)}$.

21.3 c) La formule de Taylor-Young affirme que $\sin(x) = 1 - \frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 + \frac{1}{24}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^4 + \underset{x \rightarrow \frac{\pi}{2}}{\mathcal{O}\left(\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^5\right)}$ (observez que l'ordre 5 sera suffisant !) et $\cos(t) = -1 + \frac{1}{2}(t - \pi)^2 + \underset{t \rightarrow \pi}{\mathcal{O}\left((t - \pi)^3\right)}$ (observez que l'ordre 3 sera suffisant !).

D'où :

$$\begin{aligned}\cos(\pi \sin(x)) &= -1 + \frac{1}{2}\left(-\frac{\pi}{2}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 + \frac{\pi}{24}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^4\right)^2 + \underset{x \rightarrow \frac{\pi}{2}}{\mathcal{O}\left(\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^7\right)} \\ &= -1 + \frac{\pi^2}{8}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^4 - \frac{\pi^2}{48}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^6 + \underset{x \rightarrow \frac{\pi}{2}}{\mathcal{O}\left(\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^7\right)}.\end{aligned}$$

21.4 a) On a :

$$\begin{aligned}\frac{1}{x(e^x - 1)} - \frac{1}{x^2} &= \frac{1}{x\left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + \underset{x \rightarrow 0}{\mathcal{O}(x^5)}\right)} - \frac{1}{x^2} \\ &= \frac{1}{x^2} \left(\frac{1}{1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + \frac{x^3}{24} + \frac{x^4}{120} + \underset{x \rightarrow 0}{\mathcal{O}(x^4)}} - 1 \right) \\ &= \frac{1}{x^2} \left(-\frac{x}{2} - \frac{x^2}{6} - \frac{x^3}{24} - \frac{x^4}{120} + \left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + \frac{x^3}{24}\right)^2 - \left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{6}\right)^3 + \left(\frac{x}{2}\right)^4 + \underset{x \rightarrow 0}{\mathcal{O}(x^4)} \right) \\ &= -\frac{1}{2x} + \frac{1}{12} - \frac{1}{720}x^2 + \underset{x \rightarrow 0}{\mathcal{O}(x^2)}.\end{aligned}$$

21.4 b) Etablir l'existence et donner le développement limité de $f(x) = \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x+1}$, en $+\infty$ à l'ordre 5, revient à le faire, en 0 à l'ordre 5, pour l'application g définie par $g(t) = f\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{t \sin(t)}{1+t}$. Or $t \sin(t) = t^2 - \frac{t^4}{6} + \underset{t \rightarrow 0}{\mathcal{O}(t^6)}$ et $\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - t^3 + \underset{t \rightarrow 0}{\mathcal{O}(t^4)}$. D'où $g(t) = t^2 - t^3 + \frac{5}{6}t^4 - \frac{5}{6}t^5 + \underset{t \rightarrow 0}{\mathcal{O}(t^6)}$, puis $f(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3} + \frac{5}{6x^4} - \frac{5}{6x^5} + \underset{x \rightarrow +\infty}{\mathcal{O}\left(\frac{1}{x^6}\right)}$.

21.4 c) On a : $x \ln(x+1) - (x+1) \ln(x) = -\ln(x) + x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = -\ln(x) + 1 - \frac{1}{2x} + \frac{1}{3x^2} - \frac{1}{4x^3} + \underset{x \rightarrow +\infty}{\mathcal{O}\left(\frac{1}{x^3}\right)}$.

21.4 d) On a :

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{x} + 1\right)^{x^2} &= \exp\left(x^2 \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right) \\ &= \exp\left(x^2 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{4x^4} + \underset{x \rightarrow +\infty}{\mathcal{O}\left(\frac{1}{x^4}\right)}\right)\right) \\ &= e^x e^{-\frac{1}{2}} \exp\left(\frac{1}{3x} - \frac{1}{4x^2} + \underset{x \rightarrow +\infty}{\mathcal{O}\left(\frac{1}{x^2}\right)}\right) \\ &= e^{-\frac{1}{2}} \left(e^x + \frac{e^x}{3x} - \frac{7e^x}{36x^2}\right) + \underset{x \rightarrow +\infty}{\mathcal{O}\left(\frac{e^x}{x^2}\right)}\end{aligned}$$

Fiche n° 22. Calcul matriciel

Réponses

$$22.1 \text{ a)} \dots\dots\dots \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 3 & 3 & 4 \\ 9 & -7 & 3 \end{pmatrix}$$

$$22.1 \text{ b)} \dots\dots\dots \begin{pmatrix} -2 & -6 & -5 \\ 15 & -1 & 11 \\ 18 & -26 & -1 \end{pmatrix}$$

$$22.1 \text{ c)} \dots\dots\dots 17 \text{ (matrice } 1 \times 1)$$

$$22.1 \text{ d)} \dots\dots\dots \begin{pmatrix} 1 & 7 & -2 \\ 2 & 14 & -4 \\ -1 & -7 & 2 \end{pmatrix}$$

$$22.1 \text{ e)} \dots\dots\dots \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$22.1 \text{ f)} \dots\dots\dots \begin{pmatrix} -5 & 15 & 3 \end{pmatrix}$$

$$22.1 \text{ g)} \dots\dots\dots \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$22.1 \text{ h)} \dots\dots\dots \begin{pmatrix} 5 & 3 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$22.1 \text{ i)} \dots\dots\dots \begin{pmatrix} 1 & 7 & -2 \\ 7 & 49 & -14 \\ -2 & -14 & 4 \end{pmatrix}$$

$$22.2 \text{ a)} \dots\dots\dots \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$22.2 \text{ b)} \dots\dots\dots \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$22.2 \text{ c)} \dots\dots\dots \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$22.2 \text{ d)} \dots\dots\dots \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$$

$$22.2 \text{ e)} \dots\dots\dots \begin{pmatrix} 8 & 19 \\ 0 & 27 \end{pmatrix}$$

$$22.2 \text{ f)} \dots\dots\dots \begin{pmatrix} 2^k & 3^k - 2^k \\ 0 & 3^k \end{pmatrix}$$

$$22.2 \text{ g)} \dots\dots\dots \begin{pmatrix} \cos(2\theta) & -\sin(2\theta) \\ \sin(2\theta) & \cos(2\theta) \end{pmatrix}$$

$$22.2 \text{ h)} \dots\dots\dots \begin{pmatrix} \cos(3\theta) & -\sin(3\theta) \\ \sin(3\theta) & \cos(3\theta) \end{pmatrix}$$

$$22.2 \text{ i)} \dots\dots\dots \begin{pmatrix} \cos(k\theta) & -\sin(k\theta) \\ \sin(k\theta) & \cos(k\theta) \end{pmatrix}$$

$$22.2 \text{ j)} \dots\dots\dots \begin{pmatrix} n & \cdots & n \\ \vdots & (n) & \vdots \\ n & \cdots & n \end{pmatrix}$$

$$22.2 \text{ k)} \dots\dots\dots \begin{pmatrix} n^2 & \cdots & n^2 \\ \vdots & (n^2) & \vdots \\ n^2 & \cdots & n^2 \end{pmatrix}$$

$$22.2 \text{ l)} \dots\dots\dots n^{k-1}D$$

$$22.3 \text{ a)} \dots\dots\dots 2 \times 3^{j-i} \times 5^{i-1}$$

$$22.3 \text{ b)} \dots\dots\dots 2^{i+1}3^{j-i}(2^n - 1)$$

$$22.3 \text{ c)} \dots\dots\dots 2 \times 3^{i+j} \left(1 - \left(\frac{2}{3} \right)^n \right)$$

$$22.3 \text{ d)} \dots\dots\dots \begin{pmatrix} i-1 \\ j \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} i-1 \\ j-2 \end{pmatrix}$$

$$22.4 \text{ a)} \dots\dots\dots 2^{i-j} \begin{pmatrix} i-1 \\ j-1 \end{pmatrix}$$

$$22.4 \text{ b)} \dots\dots\dots (1 - \delta_{i,1})(\delta_{i-1,j+1} + \delta_{i,j}) + (1 - \delta_{i,n})(\delta_{i,j} + \delta_{i+1,j-1})$$

$$22.5 \text{ a)} \dots\dots\dots \frac{1}{2(\pi - e)} \begin{pmatrix} 2 & -e \\ -2 & \pi \end{pmatrix}$$

$$22.5 \text{ b)} \dots\dots\dots \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -1 - 2i \\ 1 & -1 + i \end{pmatrix}$$

$$22.5 \text{ c)} \dots\dots\dots \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & -1 \\ -6 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$22.5 \text{ d)} \dots\dots\dots \frac{1}{4\pi} \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$22.5 \text{ e)} \dots\dots\dots \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 8 & 4 & -2 \\ -16 & -6 & 7 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$22.5 \text{ f)} \dots\dots\dots \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

22.5 g) $\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 & 0 \\ 8 & -6 & 4 & 2 \\ -7 & 5 & -3 & -1 \\ -5 & 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

22.5 h) Non inversible!

22.5 i) $\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

22.6 a) $\lambda \neq 1$

22.6 b) $\frac{1}{1-\lambda} \begin{pmatrix} -4 & -1 & 3 \\ 2\lambda+2 & \lambda & -2\lambda-1 \\ \lambda-1 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix}$

22.6 c) $\lambda \neq 1$

22.6 d) $\frac{1}{1-\lambda} \begin{pmatrix} -1-\lambda+\lambda^2 & 1-\lambda & 2-\lambda \\ 1 & 0 & -1 \\ 1-\lambda^2 & \lambda-1 & \lambda-1 \end{pmatrix}$

Corrigés

22.2 a) Un calcul direct donne $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

22.2 b) Un calcul direct donne $A^3 = A^2 \times A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

22.2 c) La conjecture est alors immédiate : les termes diagonaux sont égaux à 1 et le terme (1, 2) est égal à k .

22.2 d) On calcule : $B^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$.

22.2 e) On calcule : $B^3 = B^2 \times B = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 19 \\ 0 & 27 \end{pmatrix}$.

22.2 f) On remarque que les termes diagonaux valent 2^k et 3^k respectivement, et que, pour A^2 , $4 + 5 = 9$, pour A^3 , $8 + 19 = 27$, donc on peut conjecturer que $A^k = \begin{pmatrix} 2^k & 3^k - 2^k \\ 0 & 3^k \end{pmatrix}$.

22.2 g) On calcule :

$$C^2 = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta)^2 - \sin(\theta)^2 & -2\cos(\theta)\sin(\theta) \\ 2\sin(\theta)\cos(\theta) & -\sin(\theta)^2 + \cos(\theta)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(2\theta) & -\sin(2\theta) \\ \sin(2\theta) & \cos(2\theta) \end{pmatrix}$$

22.2 j) Deux possibilités de faire le calcul : « à la main », ou bien avec la formule théorique du produit.

À la main, on remarque que lorsque l'on effectue le produit $D \times D$, chaque coefficient résultera du produit d'une ligne de 1 par une colonne de 1, donc sera égal à n : $D \times D = \begin{pmatrix} n & \cdots & n \\ \vdots & (n) & \vdots \\ n & \cdots & n \end{pmatrix} = nD$.

En utilisant les coefficients, on peut écrire que

$$[D^2]_{ij} = \sum_{k=1}^n [D]_{ik} [D]_{kj} = \sum_{k=1}^n 1 = n.$$

22.2 k) Comme $D^2 = nD$, $D^3 = D \times nD = nD^2 = n \times nD = n^2D$.

22.2 l) La conjecture est alors évidente.

22.3 a) On calcule :

$$[A \times B]_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} = \sum_{k=1}^n \binom{i-1}{k-1} 2^k 3^{j-k}$$

Mais si $k > i$, $\binom{i-1}{k-1} = 0$, donc

$$\begin{aligned} [A \times B]_{ij} &= \sum_{k=1}^i \binom{i-1}{k-1} 2^k 3^{j-k} \\ &= \sum_{\ell=0}^{i-1} \binom{i-1}{\ell} 2^{\ell+1} 3^{j-\ell-1} \text{ en faisant le changement d'indice } \ell = k-1 \\ &= 2 \times 3^{j-1} \sum_{\ell=0}^{i-1} \binom{i-1}{\ell} \left(\frac{2}{3}\right)^\ell \\ &= 2 \times 3^{j-1} \times \left(\frac{2}{3} + 1\right)^{i-1} \\ &= 2 \times 3^{j-1} \times \frac{5^{i-1}}{3^{i-1}} = 2 \times 3^{j-i} \times 5^{i-1} \end{aligned}$$

22.3 b) On calcule :

$$[B^2]_{ij} = \sum_{k=1}^n b_{ik} b_{kj} = \sum_{k=1}^n 2^i 3^{k-i} 2^k 3^{j-k} = 2^i 3^{j-i} \sum_{k=1}^n 2^k = 2^{i+1} 3^{j-i} (2^n - 1).$$

22.3 c) On calcule :

$$[B^\top \times B]_{ij} = \sum_{k=1}^n [B^\top]_{ik} b_{kj} = \sum_{k=1}^n b_{ki} b_{kj} = \sum_{k=1}^n 2^k 3^{i-k} 2^k 3^{j-k} = 3^{i+j} \sum_{k=1}^n \left(\frac{2}{3}\right)^k = 2 \times 3^{i+j} \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right).$$

22.3 d) On calcule

$$[A \times C]_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} c_{kj} = \sum_{k=1}^n \binom{i-1}{k-1} (\delta_{k,j+1} + \delta_{k,j-1}) = \binom{i-1}{j} + \binom{i-1}{j-2}$$

22.4 a) Déjà, la matrice A^2 est triangulaire inférieure (produit de deux matrices triangulaires inférieures). Soit $j \leq i$. Alors

$$\begin{aligned} [A^2]_{ij} &= \sum_{k=1}^n [A]_{ik} [A]_{kj} = \sum_{k=1}^n \binom{i-1}{k-1} \binom{k-1}{j-1} \\ &= \sum_{k=j}^i \binom{i-1}{k-1} \binom{k-1}{j-1} \\ &= \sum_{k=j}^i \frac{(i-1)!}{(k-1)!(i-k)!} \frac{(k-1)!}{(j-1)!(k-j)!} \\ &= \sum_{k=j}^i \frac{(i-1)!}{(j-1)!(i-j)!} \frac{(i-j)!}{(k-j)!(i-j-(k-j))!} \\ &= \binom{i-1}{j-1} \sum_{k=j}^i \binom{i-j}{k-j} \\ &= \binom{i-1}{j-1} \sum_{\ell=0}^{i-j} \binom{i-j}{\ell} \text{ en posant } \ell = k-j \\ &= 2^{i-j} \binom{i-1}{j-1}. \end{aligned}$$

22.4 b) Pour vérifier ses calculs, il est conseillé de regarder des exemples !

$$n = 4 : \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad n = 5 : \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On calcule :

$$\begin{aligned} [C^2]_{ij} &= \sum_{k=1}^n c_{ik} c_{kj} = \sum_{k=1}^n (\delta_{i,k+1} + \delta_{i,k-1})(\delta_{k,j+1} + \delta_{k,j-1}) \\ &= \sum_{k=1}^n \delta_{i,k+1} \delta_{k,j+1} + \sum_{k=1}^n \delta_{i,k+1} \delta_{k,j-1} + \sum_{k=1}^n \delta_{i,k-1} \delta_{k,j+1} + \sum_{k=1}^n \delta_{i,k-1} \delta_{k,j-1}. \end{aligned}$$

Si $(i, j) \notin \{1, n\}^2$. Donc

$$[C^2]_{ij} = \delta_{i-1,j+1} + 2\delta_{i,j} + \delta_{i+1,j-1}.$$

Ceci est confirmé par la structure « tridiagonale espacée » .

Sinon, pour (i, j) quelconque dans $\llbracket 1, n \rrbracket^2$, on trouve

$$[C^2]_{ij} = (1 - \delta_{i,1})(\delta_{i-1,j+1} + \delta_{i,j}) + (1 - \delta_{i,n})(\delta_{i,j} + \delta_{i+1,j-1}),$$

car $\delta_{1,k+1} = 0 = \delta_{n,k-1}$ pour tout k entre 1 et n .

22.5 a) On remarque que $2\pi - 2e = 2(\pi - e) \neq 0$, donc A est inversible d'inverse $\frac{1}{2(\pi - e)} \begin{pmatrix} 2 & -e \\ -2 & \pi \end{pmatrix}$.

22.5 c) Effectuons un pivot de Gauss :

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -3 & 0 & 1 \end{array} \right) L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \\ &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -3 & 0 & 1 \end{array} \right) L_2 \leftarrow L_2/2 \\ &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1/2 & 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -1 & 1 \end{array} \right) L_1 \leftarrow L_1 + L_2 \\ &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 5/2 & 1 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 3/2 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -1 & 1 \end{array} \right) L_1 \leftarrow L_1 - 1/2 L_3 \\ &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 5/2 & 1 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 3/2 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -1 & 1 \end{array} \right) L_2 \leftarrow L_2 - 1/2 L_3 \end{aligned}$$

Donc B est inversible d'inverse $\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & -1 \\ -6 & -2 & 2 \end{pmatrix}$

22.5 d) Il ne faut pas avoir peur du π et écrire que $C = \pi \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$. On calcule alors (par pivot de Gauss) que

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \text{ est inversible d'inverse } \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \text{ donc } C \text{ est inversible d'inverse } \frac{1}{4\pi} \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

22.5 h) On remarque que $L_3 = L_1 + 2L_2 + 2L_4$.

22.6 a) Effectuons un pivot de Gauss :

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & | & 0 & 1 & 0 \\ \lambda & 1 & 2 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 & | & 0 & 1 & 0 \\ \lambda & 1 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ \lambda & 1 & 2 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} L_2 \leftrightarrow L_1$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 1+2\lambda & | & 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 2+2\lambda & | & 0 & \lambda & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 + \lambda L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + \lambda L_1 \end{matrix}$$

Si $\lambda = 1$, alors la matrice n'est pas inversible. Sinon,

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 1+2\lambda & | & 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 2+2\lambda & | & 0 & \lambda & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3/(1-\lambda) & | & 1/(1-\lambda) & 1/(1-\lambda) & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 1+2\lambda & | & 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \leftarrow L_1 + \frac{1}{1-\lambda} L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \end{matrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & | & 4/(1-\lambda) & 1/(1-\lambda) & -3/(1-\lambda) \\ 0 & 1-\lambda & 0 & | & 2\lambda+2 & \lambda & -2\lambda-1 \\ 0 & 0 & 1 & | & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \leftarrow L_1 - \frac{3}{1-\lambda} L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - (1+2\lambda)L_3 \end{matrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & -4/(1-\lambda) & -1/(1-\lambda) & 3/(1-\lambda) \\ 0 & 1 & 0 & | & (2\lambda+2)/(1-\lambda) & \lambda/(1-\lambda) & (-2\lambda-1)/(1-\lambda) \\ 0 & 0 & 1 & | & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \leftarrow -L_1 \\ L_2 \leftarrow \frac{1}{1-\lambda} L_2 \end{matrix}$$

Dans ce cas, l'inverse de la matrice est $\frac{1}{1-\lambda} \begin{pmatrix} -4 & -1 & 3 \\ 2\lambda+2 & \lambda & -2\lambda-1 \\ \lambda-1 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix}$

.....

Fiche n° 23. Algèbre linéaire

Réponses

23.1 a) $(3, -1)$

23.1 b) $(-1, 3)$

23.1 c) $(9/11, 2/11)$

23.1 d) $(-2, 4/5, 11/5)$

23.1 e) $(-1, 1/2, 1/2)$

23.1 f) $(0, 2, 4, 1)$

23.1 g) $(1/2, -\sqrt{3}/2)$

23.2 a) 2

23.2 b) 1

23.2 c) 1

23.2 d) 2

23.2 e) 2

23.2 f) 1

23.3 a) 2

23.3 b) 2

23.3 c) 3

23.3 d) 4

23.4 a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$

23.4 b) $\begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

23.4 c) $\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -19 & -43 \\ 9 & 21 \end{pmatrix}$

23.4 d) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

23.4 e) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

23.5 a) $\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 4 & 15 & 0 \end{pmatrix}$

23.5 b) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Corrigés

23.1 a) Notons $u = \lambda(0, 1) + \mu(-1, 2)$. Alors, $\begin{cases} -\mu & = 1 \\ \lambda + 2\mu & = 1 \end{cases}$. Ainsi, $u = 3(0, 1) - (-1, 2)$.

23.1 b) Notons $u = \lambda(0, 1) + \mu(-1, 2)$. Alors, $\begin{cases} -\mu & = 1 \\ \lambda + 2\mu & = 1 \end{cases}$. Ainsi, $u = -(-1, 2) + 3(0, 1)$.

23.1 c) Notons $u = \lambda(1, 2) + \mu(12, 13)$. Alors,

$$\begin{cases} \lambda + 12\mu & = 3 \\ 2\lambda + 13\mu & = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda + 12\mu & = 3 \\ -11\mu & = -2 \end{cases}$$

Ainsi, $u = \frac{9}{11}(1, 2) + \frac{2}{11}(12, 13)$.

23.1 d) On note $u = \lambda(0, 1, 3) + \mu(4, 5, 6) + \nu(-1, 0, 1)$. Alors,

$$\begin{cases} 4\mu - \nu & = 1 \\ \lambda + 5\mu & = 2 \\ 3\lambda + 6\mu + \nu & = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda + 5\mu & = 2 \\ 4\mu - \nu & = 1 \\ -9\mu + \nu & = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda + 5\mu & = 2 \\ -\nu + 4\mu & = 1 \\ -5\mu & = -4 \end{cases}$$

Ainsi, $u = -2(0, 1, 3) + \frac{4}{5}(4, 5, 6) + \frac{11}{5}(-1, 0, 1)$.

23.1 e) Notons $u = \lambda(1, 0, 1) + \mu(1, 1, 1) + \nu(-1, -1, 3)$. Alors,

$$\begin{cases} \lambda + \mu - \nu & = -1 \\ \mu - \nu & = 0 \\ \lambda + \mu + 3\nu & = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda + \mu - \nu & = -1 \\ \mu - \nu & = 0 \\ 4\nu & = 2 \end{cases}$$

Ainsi, $u = -(1, 0, 1) + \frac{1}{2}(1, 1, 1) + \frac{1}{2}(-1, -1, 3)$.

23.1 f) Notons $u = \lambda + \mu X + \nu X(X - 1) + \delta X(X - 1)(X - 2)$.

En évaluant en 0, $\lambda = 0$.

En évaluant en 1, $\mu = 2$.

En évaluant en 2, $2\mu + 2\nu = 8 + 4 = 12$ soit $\nu = 4$.

En identifiant les coefficients de X^3 dans chacun des membres, $1 = \delta$.

Finalement, $u = 2X + 4X(X - 1) + X(X - 1)(X - 2)$.

23.1 g) En utilisant les formules d'addition, $u(x) = \frac{1}{2} \cos(x) - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin(x)$.

23.2 a) Les colonnes de la matrice ne sont pas colinéaires.

23.2 b) Toutes les lignes sont proportionnelles à la première qui est non nulle.

23.2 c) Toutes les lignes sont proportionnelles à la première qui est non nulle.

23.2 d) Les deux premiers vecteurs colonnes sont non colinéaires, le troisième est la somme des deux premiers.

23.2 e) Les deux vecteurs colonnes ne sont pas colinéaires.

23.2 f) Toutes les colonnes sont égales à la première qui est non nulle.

23.3 a) En effectuant les opérations élémentaires $L_2 \leftarrow L_2 + L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1$, on obtient $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

En effectuant l'opération élémentaire $L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2$, on obtient $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Ainsi, $\text{Rg}(A) = 2$.

23.3 b) Si $\sin \theta = 0$, i.e. il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $\theta = n\pi$, alors la matrice est égale à $\begin{pmatrix} (-1)^n & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix}$ et elle est de rang 2.

Sinon, on effectue l'opération élémentaire $L_1 \leftarrow \sin(\theta)L_1 - \cos(\theta)L_2$ pour obtenir la matrice $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ qui est de rang 2 car $\sin(\theta) \neq 0$.

23.3 c) En effectuant l'opération élémentaire $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$, on obtient $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

En effectuant l'opération élémentaire $L_3 \leftarrow 2L_3 + L_2$, on obtient $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$.

Ainsi, le rang de la matrice vaut 3.

23.3 d) En effectuant les opérations élémentaires $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$, $L_3 \leftarrow L_3 - 4L_1$ et $L_4 \leftarrow L_4 - L_1$, on obtient

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & -5 & -4 \\ 0 & 6 & -7 & -13 \\ 0 & 5 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

En effectuant l'opération élémentaire $C_2 \leftrightarrow C_3$, on obtient $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -5 & 3 & -4 \\ 0 & -7 & 6 & -13 \\ 0 & 0 & 5 & -2 \end{pmatrix}.$

En effectuant l'opération élémentaire $L_3 \leftarrow 5L_3 - 7L_2$, on obtient $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -5 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 9 & -37 \\ 0 & 0 & 5 & -2 \end{pmatrix}.$

Comme les deux dernières lignes sont linéairement indépendantes, le rang de la matrice vaut 4.

23.4 a) D'une part, $f(1, 0) = (1, 3) = 1 \cdot (1, 0) + 3 \cdot (0, 1)$. D'autre part, $f(0, 1) = (1, -5) = 1 \cdot (1, 0) - 5 \cdot (0, 1)$. Ainsi, $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}.$

23.4 b) D'une part, $f(0, 1) = (1, -5) = -5 \cdot (0, 1) + 1 \cdot (1, 0)$. D'une part, $f(1, 0) = (1, 3) = 3 \cdot (0, 1) + 1 \cdot (1, 0)$. Ainsi, $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$

23.4 c) $f(1, 2) = (4, -1)$ et $f(3, 4) = (10, -1)$. De plus, la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base canonique vaut

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, $P \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -19/2 \\ 9/2 \end{pmatrix}$ et $P \begin{pmatrix} 10 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -43/2 \\ 21/2 \end{pmatrix}$. Donc $f(1, 2) = -\frac{19}{2}(1, 2) + \frac{9}{2}(3, 4)$ et $f(3, 4) = -\frac{43}{2}(1, 2) + \frac{21}{2}(3, 4)$.

Ainsi, $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -19 & -43 \\ 9 & 21 \end{pmatrix}.$

23.4 d) Comme $f(1, 0, 0) = (1, 3, 0) = (1, 0, 0) + 3(0, 1, 0) + 0(1, 1, 1)$, $f(0, 1, 0) = (1, 0, 1) = 0 \cdot (1, 0, 0) - (0, 1, 0) + (1, 1, 1)$

et $f(1, 1, 1) = (2, 2, 1) = (1, 0, 0) + (0, 1, 0) + (1, 1, 1)$, alors $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$

23.4 e) Comme $f(1) = 1$, $f(X) = X + 2$ et $f(X^2) = (X + 2)^2 = X^2 + 4X + 4$, alors $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

23.5 a) Comme $f(0, 1, 3) = (4, -1) = -1(0, 1) + 4(1, 0)$, $f(4, 5, 6) = (15, -1) = -1(0, 1) + 15(1, 0)$ et $f(-1, 0, 1) = (0, -1) = -(0, 1) + 0(1, 0)$, alors $\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 4 & 15 & 0 \end{pmatrix}.$

23.5 b) Comme $f(1) = 0 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot X + 0 \cdot X^2 + 0 \cdot X^3$, $f(X) = 1 = 1 + 0 \cdot X + 0 \cdot X^2 + 0 \cdot X^3$ et $f(X^2) = 2X =$

$0 \cdot 1 + 2X + 0 \cdot X^2 + 0 \cdot X^3$, alors $\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

Fiche n° 24. Équations différentielles

Réponses

24.1 a) $x \mapsto 56e^{12x}$

24.1 b) $x \mapsto 6e^x - 1$

24.1 c) $x \mapsto \frac{8e^{3x} - 5}{3}$

24.1 d) $x \mapsto 9e^{2x} - 6$

24.2 a) $x \mapsto e^{(6-x)/5}$

24.2 b) $x \mapsto 1 - 2e^{-2x/7+2}$

24.2 c) $x \mapsto \left(\frac{6}{\sqrt{5}} + \pi \right) e^{\sqrt{5}x} - \frac{6}{\sqrt{5}}$

24.2 d) $x \mapsto \left(12 + \frac{2e}{\pi} \right) e^{\pi x - \pi^2} - \frac{2e}{\pi}$

24.3 a) $x \mapsto e^{2x}$

24.3 b) $x \mapsto e^x$

24.3 c) $x \mapsto 2e^{2x} - e^x$

24.3 d) $x \mapsto (2 - 3i)e^x + (3i - 1)e^{2x}$

24.4 a) $x \mapsto e^x$

24.4 b) $x \mapsto 7e^{-x} - 5e^{-2x}$

24.4 c) $x \mapsto \frac{4}{3}e^x - \frac{1}{3}e^{-2x}$

24.4 d) $x \mapsto (2 - x)e^x$

24.4 e) $x \mapsto (2 - x)e^{2-2x}$

24.5 a) $x \mapsto \cos x + 2 \sin x$

24.5 b) $x \mapsto e^{-x/2} \left(\cos \frac{\sqrt{3}x}{2} - \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \frac{\sqrt{3}x}{2} \right)$

24.5 c) $x \mapsto e^{-x} \sin(x)$

24.5 d) $x \mapsto e^x \left(\frac{-1+i}{2} e^{2ix} + \frac{1+i}{2} e^{-2ix} \right)$

Corrigés

24.1 a) Notons y_0 l'unique solution de ce problème de Cauchy. L'ensemble des solutions de l'équation homogène $y' - 12y = 0$ est $\{x \mapsto \lambda e^{12x}, \lambda \in \mathbb{R}\}$. Ainsi, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $y_0 : x \mapsto \lambda e^{12x}$.

Alors, $y_0(0) = 56 = \lambda$. Finalement, $y_0 : x \mapsto 56e^{12x}$.

24.1 b) Notons y_0 l'unique solution de ce problème de Cauchy. L'ensemble des solutions de l'équation homogène $y' - y = 0$ est $\{x \mapsto \lambda e^x, \lambda \in \mathbb{R}\}$. De plus, si μ est une solution particulière constante, alors $0 = \mu + 1$ soit $\mu = -1$. Ainsi, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $y_0 : x \mapsto \lambda e^x - 1$. Alors, $y_0(0) = 5 = \lambda - 1$. Finalement, $y_0 : x \mapsto 6e^x - 1$.

24.1 c) Notons y_0 l'unique solution de ce problème de Cauchy. L'ensemble des solutions de l'équation homogène $y' - 3y = 0$ est $\{x \mapsto \lambda e^{3x}, \lambda \in \mathbb{R}\}$. De plus, si μ est une solution particulière constante, alors $0 = 3\mu + 5$ soit $\mu = -5/3$. Ainsi, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $y_0 : x \mapsto \lambda e^{3x} - 5/3$.

Alors, $y_0(0) = 1 = \lambda - 5/3$. Finalement, $y_0 : x \mapsto \frac{8e^{3x} - 5}{3}$.

24.1 d) Notons y_0 l'unique solution de ce problème de Cauchy. L'ensemble des solutions de l'équation homogène $y' - 2y = 0$ est $\{x \mapsto \lambda e^{2x}, \lambda \in \mathbb{R}\}$. De plus, si μ est une solution particulière constante, alors $0 = 2\mu + 12$ soit $\mu = -6$. Ainsi, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $y_0 : x \mapsto \lambda e^{2x} - 6$.

Alors, $y_0(0) = 3 = \lambda - 6$. Finalement, $y_0 : x \mapsto 9e^{2x} - 6$.

24.2 a) Notons y_0 l'unique solution de ce problème de Cauchy. L'équation est homogène et son ensemble de solutions est $\{x \mapsto \lambda e^{-x/5}, \lambda \in \mathbb{R}\}$. Ainsi, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $y_0 : x \mapsto \lambda e^{-x/5}$.

Alors, $y_0(1) = e = \lambda e^{-1/5}$. Finalement, $y_0 : x \mapsto e^{(6-x)/5}$.

24.2 b) Notons y_0 l'unique solution de ce problème de Cauchy. L'ensemble des solutions de l'équation homogène $y' + \frac{2}{7}y = 0$ est $\{x \mapsto \lambda e^{-2x/7}, \lambda \in \mathbb{R}\}$. De plus, si μ est une solution particulière constante, alors $0 + 2\mu = 2$ soit $\mu = 1$. Ainsi, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $y_0 : x \mapsto \lambda e^{-2x/7} + 1$. Alors, $y_0(7) = -1 = \lambda e^{-2} + 1$. Finalement, $y_0 : x \mapsto -2e^{-2x/7+2} + 1$.

24.2 c) Notons y_0 l'unique solution de ce problème de Cauchy. L'ensemble des solutions de l'équation homogène $y' - \sqrt{5}y = 0$ est $\{x \mapsto \lambda e^{\sqrt{5}x}, \lambda \in \mathbb{R}\}$. De plus, si μ est une solution particulière constante, alors $0 - \sqrt{5}\mu = 6$ soit $\mu = -\frac{6}{\sqrt{5}}$. Ainsi, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $y_0 : x \mapsto \lambda e^{\sqrt{5}x} - \frac{6}{\sqrt{5}}$.

Alors, $y_0(0) = \pi = \lambda - \frac{6}{\sqrt{5}}$. Finalement, $y_0 : x \mapsto \left(\frac{6}{\sqrt{5}} + \pi\right)e^{\sqrt{5}x} - \frac{6}{\sqrt{5}}$.

24.2 d) Notons y_0 l'unique solution de ce problème de Cauchy. L'ensemble des solutions de l'équation homogène $y' - \pi y = 0$ est $\{x \mapsto \lambda e^{\pi x}, \lambda \in \mathbb{R}\}$. De plus, si μ est une solution particulière constante, alors $0 = \pi\mu + 2e$ soit $\mu = -\frac{2e}{\pi}$. Ainsi, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $y_0 : x \mapsto \lambda e^{\pi x} - \frac{2e}{\pi}$. Alors, $y_0(\pi) = 12 = \lambda e^{\pi^2} - \frac{2e}{\pi}$.

Finalement, $y_0 : x \mapsto \left(12 + \frac{2e}{\pi}\right)e^{\pi x - \pi^2} - \frac{2e}{\pi}$.

24.3 a) Soit y_0 la solution du problème de Cauchy. L'équation caractéristique associée est $r^2 - 3r + 2 = 0$ dont les solutions sont 2 et 1 (car $2 + 1 = 3$ et $2 \cdot 1 = 2$ donc on reconnaît $r^2 - (2 + 1)r + 2 \cdot 1$). L'ensemble des solutions de l'équation est donc $\{x \mapsto \lambda e^x + \mu e^{2x}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2\}$. Ainsi, il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$ tel que $y_0 : x \mapsto \lambda e^x + \mu e^{2x}$.

Alors, $y(0) = \lambda + \mu = 1$ et $y'(0) = \lambda + 2\mu = 2$. Ce système se réduit en $\lambda + \mu = 1$ et $\mu = 1$. Ainsi, $y_0 : x \mapsto e^{2x}$.

24.3 b) Soit y_0 la solution du problème de Cauchy. L'équation caractéristique associée est $r^2 - 3r + 2 = 0$ dont les solutions sont 2 et 1 (car $2 + 1 = 3$ et $2 \cdot 1 = 2$ donc on reconnaît $r^2 - (2 + 1)r + 2 \cdot 1$). L'ensemble des solutions de l'équation est donc $\{x \mapsto \lambda e^x + \mu e^{2x}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2\}$. Ainsi, il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$ tel que $y_0 : x \mapsto \lambda e^x + \mu e^{2x}$.

Alors, $y(0) = \lambda + \mu = 1$ et $y'(0) = \lambda + 2\mu = 1$. Ce système se réduit en $\lambda + \mu = 1$ et $\mu = 0$. Ainsi, $y_0 : x \mapsto e^x$.

24.3 c) Soit y_0 la solution du problème de Cauchy. L'équation caractéristique associée est $r^2 - 3r + 2 = 0$ dont les solutions sont 2 et 1 (car $2 + 1 = 3$ et $2 \cdot 1 = 2$ et on reconnaît $r^2 - (2 + 1)r + 2 \cdot 1$). L'ensemble des solutions de l'équation est donc $\{x \mapsto \lambda e^x + \mu e^{2x}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2\}$. Ainsi, il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$ tel que $y_0 : x \mapsto \lambda e^x + \mu e^{2x}$.

Alors, $y(0) = \lambda + \mu = 1$ et $y'(0) = \lambda + 2\mu = 3$. Ce système se réduit en $\lambda + \mu = 1$ et $\mu = 2$. Ainsi, $y_0 : x \mapsto 2e^{2x} - e^x$.

24.3 d) Soit y_0 la solution du problème de Cauchy. L'équation caractéristique associée est $r^2 - 3r + 2 = 0$ dont les solutions sont 2 et 1 (car $2 + 1 = 3$ et $2 \cdot 1 = 2$ et on reconnaît $r^2 - (2 + 1)r + 2 \cdot 1$). L'ensemble des solutions de l'équation est donc $\{x \mapsto \lambda e^x + \mu e^{2x}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2\}$. Ainsi, il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$ tel que $y_0 : x \mapsto \lambda e^x + \mu e^{2x}$.

Alors, $y(0) = \lambda + \mu = 1$ et $y'(0) = \lambda + 2\mu = 3i$. Ce système se réduit en $\lambda + \mu = 1$ et $\mu = 3i - 1$. Ainsi, $y_0 : x \mapsto (2 - 3i)e^x + (3i - 1)e^{2x}$.

24.4 a) Soit y_0 la solution du problème de Cauchy. L'équation caractéristique associée est $r^2 - 1 = 0$ dont les solutions sont -1 et 1 . L'ensemble des solutions de l'équation est donc $\{x \mapsto \lambda e^x + \mu e^{-x}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2\}$. Ainsi, il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$ tel que $y_0 : x \mapsto \lambda e^x + \mu e^{-x}$.

Alors, $y(0) = \lambda + \mu = 1$ et $y'(0) = \lambda - \mu = 1$. En additionnant et soustrayant ces relations, on obtient $\lambda = 1$ et $\mu = 0$. Ainsi, $y_0 : x \mapsto e^x$.

24.4 b) Soit y_0 la solution du problème de Cauchy. L'équation caractéristique associée est $r^2 + 3r + 2 = 0$ dont les solutions sont -1 et -2 (car $-1 - 2 = -3$ et $(-2) \cdot (-1) = 2$ et on reconnaît $r^2 - (-2 - 1)r + (-2) \cdot (-1)$). L'ensemble des solutions de l'équation est donc $\{x \mapsto \lambda e^{-x} + \mu e^{-2x}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2\}$. Ainsi, il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$ tel que $y_0 : x \mapsto \lambda e^{-x} + \mu e^{-2x}$.

Alors, $y(0) = \lambda + \mu = 2$ et $y'(0) = -\lambda - 2\mu = 3$. Le système se réduit en $\lambda + \mu = 2$ et $-\mu = 5$. Ainsi, $y_0 : x \mapsto 7e^{-x} - 5e^{-2x}$.

24.4 c) Soit y_0 la solution du problème de Cauchy. L'équation caractéristique associée est $r^2 + r - 2 = 0$. Le discriminant du trinôme vaut 9 et ses racines sont -2 et 1 . L'ensemble des solutions de l'équation est donc

$$\{x \mapsto \lambda e^x + \mu e^{-2x}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2\}.$$

Ainsi, il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$ tel que $y_0 : x \mapsto \lambda e^x + \mu e^{-2x}$.

Alors, $y(0) = \lambda + \mu = 1$ et $y'(0) = \lambda - 2\mu = 2$. Le système se réduit en $\lambda + \mu = 1$ et $-3\mu = 1$. Ainsi, $y_0 : x \mapsto \frac{4}{3}e^x - \frac{1}{3}e^{-2x}$.

24.4 d) Soit y_0 la solution du problème de Cauchy. L'équation caractéristique associée est $r^2 - 2r + 1 = 0$ dont la racine double est 1 . L'ensemble des solutions de l'équation est donc $\{x \mapsto (\lambda + \mu x)e^x, (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2\}$. Ainsi, il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$ tel que $y_0 : x \mapsto (\lambda + \mu x)e^x$.

Alors, $y(0) = \lambda = 2$ et $y'(0) = \lambda + \mu = 1$. Ainsi, $y_0 : x \mapsto (2 - x)e^x$.

24.4 e) Soit y_0 la solution du problème de Cauchy. L'équation caractéristique associée est $r^2 + 4r + 4 = 0$ dont la racine double est -2 . L'ensemble des solutions de l'équation est donc $\{x \mapsto (\lambda + \mu x)e^{-2x}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2\}$. Ainsi, il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$ tel que $y_0 : x \mapsto (\lambda + \mu x)e^{-2x}$.

Alors, $y(1) = (\lambda + \mu)e^{-2} = 1$ et $y'(1) = (-2\lambda + \mu - 2\mu)e^{-2} = -3$. Le système s'écrit $\lambda + \mu = e^2$ et $2\lambda + \mu = 3e^2$. Il se réduit en $\lambda + \mu = e^2$ et $\lambda = 2e^2$. Ainsi, $y_0 : x \mapsto (2 - x)e^{2-2x}$.

24.5 a) Soit y_0 l'unique solution du problème de Cauchy. L'équation caractéristique associée est $r^2 + 1 = 0$ dont les solutions sont i et $-i$. Ainsi, l'ensemble des solutions à valeurs réelles de l'équation homogène est

$$\{x \mapsto \lambda \cos x + \mu \sin x, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}.$$

Il existe donc $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que $y_0 : x \mapsto \lambda \cos x + \mu \sin x$.

Alors, $y_0(0) = 1 = \lambda$ et $y'_0(0) = 2 = \mu$. Ainsi, $y_0 : x \mapsto \cos x + 2 \sin x$.

24.5 b) Soit y_0 l'unique solution du problème de Cauchy. L'équation caractéristique associée est $r^2 + r + 1 = 0$. Les résultats sur les racines de l'unité assurent que les solutions de cette équation sont $j = e^{\frac{2i\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\bar{j}$. Ainsi, l'ensemble des solutions à valeurs réelles de l'équation homogène est

$$\left\{x \mapsto e^{-x/2} \left(\lambda \cos \frac{\sqrt{3}x}{2} + \mu \sin \frac{\sqrt{3}x}{2} \right), (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Il existe donc $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que $y_0 : x \mapsto e^{-x/2} \left(\lambda \cos \frac{\sqrt{3}x}{2} + \mu \sin \frac{\sqrt{3}x}{2} \right)$.

Alors, $y_0(0) = 1 = \lambda$ et $y'_0(0) = -1 = -\frac{\lambda}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mu$. Ainsi, $y_0 : x \mapsto e^{-x/2} \left(\cos \frac{\sqrt{3}x}{2} - \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \frac{\sqrt{3}x}{2} \right)$.

24.5 c) Soit y_0 l'unique solution du problème de Cauchy. L'équation caractéristique associée est $r^2 + 2r + 2 = 0$. Le discriminant réduit du trinôme vaut -1 et ses racines sont $-1 - i$ et $-1 + i$. Ainsi, l'ensemble des solutions à valeurs réelles de l'équation homogène est $\{x \mapsto e^{-x}(\lambda \cos(x) + \mu \sin(x)), (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$. Il existe donc $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que $y_0 : x \mapsto e^{-x}(\lambda \cos(x) + \mu \sin(x))$.

Alors, $y_0(0) = 0 = \lambda$ et $y'_0(0) = 1 = -\lambda + \mu$. Ainsi, $y_0 : x \mapsto e^{-x} \sin(x)$.

24.5 d) L'équation caractéristique associée est $r^2 - 2r + 5 = 0$. Le discriminant réduit du trinôme vaut -4 et ses racines sont $1 - 2i$ et $1 + 2i$. Ainsi, l'ensemble des solutions de l'équation homogène est $\{x \mapsto e^x(\lambda e^{2ix} + \mu e^{-2ix}), (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2\}$. Il existe donc $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$ tel que $y_0 : x \mapsto e^x(\lambda e^{2ix} + \mu e^{-2ix})$.

Alors, $y_0(0) = i = \lambda + \mu$ et $y'_0(0) = -i = (\lambda + \mu) + (2i\lambda - 2i\mu)$. Le système réduit s'écrit $\lambda + \mu = i$ et $4i\lambda = 2 - 2i$. Ainsi, $y_0 : x \mapsto e^x \left(\frac{-1+i}{2} e^{2ix} + \frac{1+i}{2} e^{-2ix} \right)$.

En utilisant les formules d'Euler, cette solution peut également s'écrire $y_0 : x \mapsto ie^x(\cos(2x) - \sin(2x))$.

Fiche n° 25. Fonctions de deux variables

Réponses

25.1 a) $]0, +\infty[\times]0, +\infty[$

25.1 b) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y \geq 0\} \setminus \{(0, 0)\}$

25.1 c) $\emptyset$

25.2 a) $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x + y$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 5y^4 + x$

25.2 b) $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2y \cos(2xy - y)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = (2x - 1) \cos(2xy - y)$

25.2 c) $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = (2xy, 2x)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = (x^2, -2y)$

25.2 d) $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{2}{1 + (2x + y)^2}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{1}{1 + (2x + y)^2}$

25.3 a) $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = -\sin(x - y)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \sin(x - y)$

25.3 b) $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \cos(e^{xy}) - xy \sin(e^{xy}) e^{xy}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -x^2 \sin(e^{xy}) e^{xy}$

25.3 c) $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = y x^{y-1}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x^y \ln x$

25.3 d) $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \begin{cases} \frac{y^2(y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \begin{cases} \frac{2x^3 y}{(x^2 + y^2)^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

25.4 a) $\sin(2t)$

25.4 b) $\frac{2e^{4t} + e^{-2t}}{\sqrt{e^{4t} - e^{-2t}}}$

25.4 c) $-72 \cos(4t) - 46 \sin(4t)$

25.5 a) $\frac{\partial(f \circ \varphi)}{\partial u}(u, v) = \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial x} \left(\frac{u+v}{2}, \frac{v-u}{2c} \right) - \frac{1}{2c} \frac{\partial f}{\partial y} \left(\frac{u+v}{2}, \frac{v-u}{2c} \right)$

25.5 a) $\frac{\partial(f \circ \varphi)}{\partial v}(u, v) = \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial x} \left(\frac{u+v}{2}, \frac{v-u}{2c} \right) + \frac{1}{2c} \frac{\partial f}{\partial y} \left(\frac{u+v}{2}, \frac{v-u}{2c} \right)$

25.5 b) $\frac{\partial(f \circ \varphi)}{\partial r}(r, \theta) = \cos \theta \frac{\partial f}{\partial x}(r \cos \theta, r \sin \theta) + \sin \theta \frac{\partial f}{\partial y}(r \cos \theta, r \sin \theta)$

25.5 b) $\frac{\partial(f \circ \varphi)}{\partial \theta}(r, \theta) = -r \sin \theta \frac{\partial f}{\partial x}(r \cos \theta, r \sin \theta) + r \cos \theta \frac{\partial f}{\partial y}(r \cos \theta, r \sin \theta)$

Corrigés

25.2 b) Calculons $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$. Soit $y \in \mathbb{R}$. La première application partielle $f_y : t \mapsto \sin(2ty - y)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, et $f'_y : t \mapsto 2y \cos(2ty - y)$. On obtient $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = f'_y(x) = 2y \cos(2xy - y)$ en évaluant en $t = x$.

25.3 d) Calculons $\frac{\partial f}{\partial x}$. On fixe $a = (x, y) \in \mathbb{R}^2$. Si $a \neq (0, 0)$ alors la première application partielle en a est $t \mapsto \frac{ty^2}{t^2 + y^2}$. Sa dérivée est $t \mapsto \frac{y^2 \cdot (t^2 + y^2) - ty^2 \cdot 2t}{(t^2 + y^2)^2}$, d'où $\frac{\partial f}{\partial x}(a) = \frac{y^2(y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^2}$ en évaluant en $t = x$. Reste à traiter le cas où $a = (0, 0)$. On calcule à la main le taux d'accroissement :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x - 0} = \frac{\frac{x \cdot 0^2}{x^2 + 0^2} - 0}{x} = \frac{0}{x^3} = 0.$$

Donc $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} 0 = 0$.

25.4 a) On pourrait simplement dériver $w : t \mapsto 4(\sin t)^2 + 3(\cos t)^2$, mais ce n'est pas l'idée du chapitre. La règle de la chaîne donne : $\frac{\partial f}{\partial x}(u(t), v(t)) \frac{\partial u}{\partial t}(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(u(t), v(t)) \frac{\partial v}{\partial t}(t) = 8 \sin t \cos t + 6 \cos t(-\sin t) = 2 \sin t \cos t = \sin(2t)$.

25.5 a) La règle de la chaîne donne $\frac{\partial(f \circ \varphi)}{\partial u}(u, v) = \frac{\partial f}{\partial x}(\varphi(u, v)) \frac{\partial \varphi_1}{\partial u}(u, v) + \frac{\partial f}{\partial y}(\varphi(u, v)) \frac{\partial \varphi_2}{\partial u}(u, v)$, avec les notations $\varphi_1(u, v) = \frac{u+v}{2}$ et $\varphi_2(u, v) = \frac{v-u}{2c}$. Remarque : c'est le changement de variables utilisé pour résoudre l'équation des ondes. En physique, on note abusivement $x = \varphi_1$ et $y = \varphi_2$.