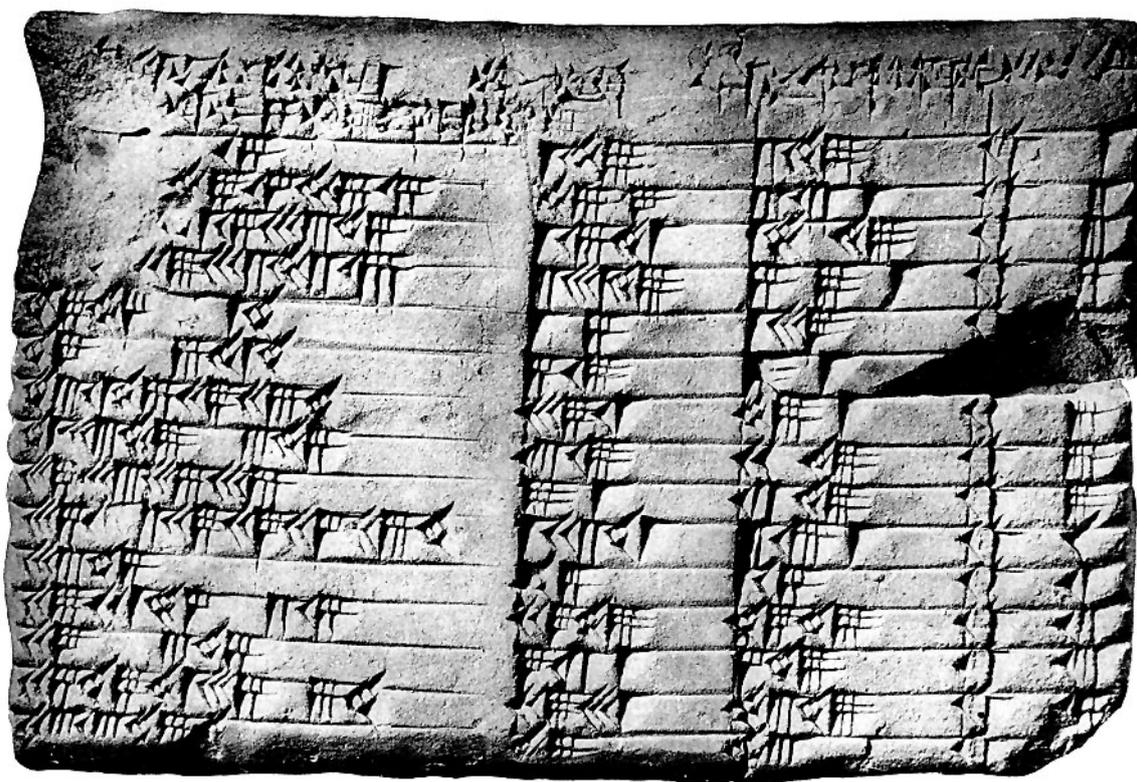


# Cahier de calcul

— pratique et entraînement —



*Plimpton 322*, tablette d'argile babylonienne (1 800 av. JC)

Cette tablette, vieille de près de 4 000 ans, donne une liste de triplets pythagoriciens, c'est-à-dire de triplets  $(a, b, c)$  de nombres entiers vérifiant  $a^2 + b^2 = c^2$ .

Ce cahier de calcul a été écrit collectivement.

### **Coordination**

Colas BARDAVID

### **Équipe des participants**

Vincent BAYLE, Romain BASSON, Olivier BERTRAND, Ménard BOURGADE, Julien BUREAUX, Alain CAMANES, Mathieu CHARLOT, Mathilde COLIN DE VERDIÈRE, Keven COMMAULT, Miguel CONCY, Rémy EUPHERTE, Hélène GROS, Audrey HECHNER, Florian HECHNER, Marie HÉZARD, Nicolas LAILLET, Valérie LE BLANC, Thierry LIMOGES, Quang-Thai NGO, Xavier PELLEGRIN, Fabien PELLEGRINI, Jean-Louis POURTIER, Valérie ROBERT, Jean-Pierre TÉCOURT, Guillaume TOMASINI, Marc TENTI

Le pictogramme 🕒 de l'horloge a été créé par Ralf SCHMITZER (The Noun Project).

La photographie de la couverture vient de Wikipedia.

Le contenu a été adapté à la filière BCPST par Jean-Philippe Préaux.

# Sommaire

<input type="checkbox"/>	1. Fractions.....	1
<input type="checkbox"/>	2. Puissances.....	3
<input type="checkbox"/>	3. Calcul littéral.....	4
<input type="checkbox"/>	4. Racines carrées.....	6
<input type="checkbox"/>	5. Expressions algébriques.....	8
<input type="checkbox"/>	6. Équations du second degré.....	10
<input type="checkbox"/>	7. Exponentielle et Logarithme.....	13
<input type="checkbox"/>	8. Trigonométrie.....	16
<input type="checkbox"/>	9. Dérivation.....	18
<input type="checkbox"/>	10. Primitives.....	21
<input type="checkbox"/>	11. Calcul d'intégrales.....	24
<input type="checkbox"/>	12. Intégration par parties.....	26
<input type="checkbox"/>	13. Changements de variable.....	28
<input type="checkbox"/>	14. Systèmes linéaires.....	30
<input type="checkbox"/>	15. Nombres complexes.....	32
<input type="checkbox"/>	16. Trigonométrie et nombres complexes.....	33
<input type="checkbox"/>	17. Sommes et produits.....	35
<input type="checkbox"/>	18. Coefficients binomiaux.....	38
<input type="checkbox"/>	19. Manipulation des fonctions usuelles.....	40
<input type="checkbox"/>	20. Suites numériques.....	41
<input type="checkbox"/>	21. Développements limités.....	43
<input type="checkbox"/>	22. Calcul matriciel.....	45
<input type="checkbox"/>	23. Algèbre linéaire.....	49
<input type="checkbox"/>	24. Équations différentielles.....	52
<input type="checkbox"/>	25. Fonctions de deux variables.....	54



# Présentation et mode d'emploi

## Qu'est-ce que ce cahier ?

Ce cahier est un cahier de calcul, basé sur le programme de mathématiques collège/lycée ainsi que sur le programme de première année de Post-Bac. Il ne se substitue en aucun cas aux TD donnés par votre professeur de maths mais est un outil pour vous aider à vous améliorer en calcul.

## À quoi sert-il ?

En mathématiques, la technique et le calcul sont fondamentaux.

Sans technique, il est impossible de correctement appréhender une question mathématique. De même que l'on doit faire des gammes et beaucoup pratiquer lorsque l'on apprend un instrument, on doit calculer régulièrement lorsque l'on pratique les mathématiques, notamment en CPGE et dans les études Post-Bac.

## Comment est-il organisé ?

Ce cahier comporte plusieurs parties :

- Un sommaire vous permettant d'avoir d'un seul coup d'œil les différentes fiches de ce cahier de calcul, et de noter celles que vous avez déjà faites ou pas.
- Une partie de **calculs élémentaires**, faisables dès le début de la première année, et centrée sur les calculs « de base » : développement, factorisation, racines carrées, fractions, *etc.* Cela peut vous paraître simple, mais sachez que ce type d'erreur de calcul est toujours fréquent, même en spé, même sur les copies de concours. Travailler les techniques élémentaires de calcul vous facilitera grandement la vie !
- Une partie liée au programme de première année : sont indiqués précisément les chapitres nécessaires pour pouvoir aborder chaque fiche de calculs.
- Les réponses brutes ainsi que les corrigés détaillés sont dans un second cahier dédié, diffusé selon le choix de votre professeur.

Chaque fiche de calculs est organisée ainsi :

- Une présentation du thème de la fiche et des prérequis (notamment, pour des techniques propres à certaines filières, on précise de quelle filière il s'agit)
- Une liste de calculs, dont le temps de résolution (incluant la longueur et la technicité du calcul) est symbolisé par une (●●●●), deux (●●●●), trois (●●●●) ou quatre (●●●●) horloges.
- Vous êtes invité à écrire directement les réponses dans les cadres prévus à cet effet.

## Comment l'utiliser ?

### Un travail personnalisé.

Ce cahier de calcul est prévu pour être **utilisé en autonomie**.

Choisissez les calculs que vous faites en fonction des difficultés que vous rencontrez et des chapitres que vous étudiez, ou bien en fonction des conseils de votre professeur de mathématiques.

Pensez aussi à l'utiliser à l'issue d'un DS ou d'une colle, lorsque vous vous êtes rendu compte que certains points de calcul étaient mal maîtrisés.

Enfin, ne cherchez pas à faire linéairement ce cahier : les fiches ne sont pas à faire dans l'ordre, mais en fonction des points que vous souhaitez travailler.

### Un travail régulier.

Essayez de pratiquer les calculs à un rythme régulier : **une quinzaine de minutes par jour** par exemple. Privilégiez un travail régulier sur le long terme plutôt qu'un objectif du type « faire 10 fiches par jour pendant les vacances » .

Point important : pour réussir à calculer, il faut répéter. C'est pour cela que nous avons mis plusieurs exemples illustrant chaque technique de calcul.

Il peut être utile de parfois refaire certains calculs : n'hésitez pas à cacher les réponses déjà écrites dans les cadres, ou à écrire vos réponses dans les cadres au crayon à papier.

### Un travail efficace.

Attention à l'utilisation des réponses et des corrigés : il est important de chercher suffisamment par soi-même avant de regarder les réponses et/ou les corrigés. Il faut vraiment **faire les calculs** afin que le corrigé vous soit profitable.

N'hésitez pas à ne faire qu'en partie une feuille de calculs : il peut être utile de revenir plusieurs fois à une même feuille, afin de voir à quel point telle technique a bien été assimilée.

### Accéder au corrigé.

Les réponses à chaque question vous sont données dans le document "Cahier de calcul - réponses" ; vous y vérifierez chacune de vos réponses. En cas d'erreur, ou en cas de doute, vous pourrez consulter un corrigé disponible à :

<http://www.i2m.univ-amu.fr/perso/jean-philippe.preaux>.

Vous trouverez à cette même adresse, les versions numériques des énoncés, et réponses.

Il est toujours possible que le corrigé contienne des erreurs : si vous en décelez une, vous pourrez le signaler à votre enseignant qui validera ou vous expliquera. Bien sûr ce dernier sera toujours disponible pour vous expliquer ou corriger lorsque vous en éprouverez le besoin.

## La progression

Avoir une solide technique de calcul s'acquiert sur le long terme, mais si vous étudiez sérieusement les fiches de ce cahier, vous verrez assez rapidement des progrès apparaître, en colle, en DS, *etc.* Une bonne connaissance du cours combinée à une plus grande aisance en calcul, c'est un très beau tremplin vers la réussite en prépa ou dans vos études !

## Une erreur ? Une remarque ?

Si jamais vous voyez une erreur d'énoncé ou de corrigé, ou bien si vous avez une remarque à faire, n'hésitez pas à écrire à l'adresse [cahierdecacul@gmail.com](mailto:cahierdecacul@gmail.com).

# Fractions

**Prérequis**

Règles de calcul sur les fractions.

## Calculs dans l'ensemble des rationnels

**Calcul 1.1 — Simplification de fractions.**



Simplifier les fractions suivantes (la lettre  $k$  désigne un entier naturel non nul).

- |                                     |                      |  |                      |
|-------------------------------------|----------------------|--|----------------------|
| a) $\frac{32}{40}$ .....            | <input type="text"/> | c) $\frac{27^{-1} \times 4^2}{3^{-4} \times 2^4}$ .....            | <input type="text"/> |
| b) $8^3 \times \frac{1}{4^2}$ ..... | <input type="text"/> | d) $\frac{(-2)^{2k+1} \times 3^{2k-1}}{4^k \times 3^{-k+1}}$ ..... | <input type="text"/> |

**Calcul 1.2 — Sommes, produits, quotients, puissances.**



Écrire les nombres suivants sous forme d'une fraction irréductible.

- |                                      |                      |  |                      |
|--------------------------------------|----------------------|--|----------------------|
| a) $\frac{2}{4} - \frac{1}{3}$ ..... | <input type="text"/> | c) $\frac{36}{25} \times \frac{15}{12} \times 5$ ..... | <input type="text"/> |
| b) $\frac{2}{3} - 0,2$ .....         | <input type="text"/> | d) $-\frac{2}{15} \div (-\frac{6}{5})$ .....           | <input type="text"/> |

**Calcul 1.3**



Écrire les nombres suivants sous forme d'une fraction irréductible.

- |   |                      |
|---|----------------------|
| a) $(2 \times 3 \times 5 \times 7)(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7})$ .....              | <input type="text"/> |
| b) $(\frac{136}{15} - \frac{28}{5} + \frac{62}{10}) \times \frac{21}{24}$ .....                               | <input type="text"/> |
| c) $\frac{5^{10} \times 7^3 - 25^5 \times 49^2}{(125 \times 7)^3 + 5^9 \times 14^3}$ .....                    | <input type="text"/> |
| d) $\frac{1\ 978 \times 1\ 979 + 1\ 980 \times 21 + 1958}{1\ 980 \times 1\ 979 - 1\ 978 \times 1\ 979}$ ..... | <input type="text"/> |

**Calcul 1.4 — Un petit calcul.**



Écrire  $\frac{0,5 - \frac{3}{17} + \frac{3}{37}}{\frac{5}{6} - \frac{5}{17} + \frac{5}{37}} + \frac{0,5 - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - 0,2}{\frac{7}{5} - \frac{7}{4} + \frac{7}{3} - 3,5}$  sous forme d'une fraction irréductible. ....

**Calcul 1.5 — Le calcul littéral à la rescousse.**



En utilisant les identités remarquables et le calcul littéral, calculer les nombres suivants.

- |  |                      |  |                      |
|--|----------------------|--|----------------------|
| a) $\frac{2\ 022}{(-2\ 022)^2 + (-2\ 021)(2\ 023)}$ .. | <input type="text"/> | c) $\frac{1\ 235 \times 2\ 469 - 1\ 234}{1\ 234 \times 2\ 469 + 1\ 235}$ ..... | <input type="text"/> |
| b) $\frac{2\ 021^2}{2\ 020^2 + 2\ 022^2 - 2}$ .....    | <input type="text"/> | d) $\frac{4\ 002}{1\ 000 \times 1\ 002 - 999 \times 1\ 001}$ ..                | <input type="text"/> |

**Calcul 1.6 — Les fractions et le calcul littéral.**



Mettre sous la forme d'une seule fraction, qu'on écrira sous la forme la plus simple possible.

- a)  $\frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}$  pour  $n \in \mathbb{N}^*$  .....
- b)  $\frac{a^3 - b^3}{(a-b)^2} - \frac{(a+b)^2}{a-b}$  pour  $(a, b, c) \in \mathbb{Z}^3$ , distincts deux à deux. ....
- c)  $\frac{\frac{6(n+1)}{n(n-1)(2n-2)}}{\frac{2n+2}{n^2(n-1)^2}}$  pour  $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1, 2\}$ . ....

**Calcul 1.7 — Le quotient de deux sommes de Gauss.**



Simplifier  $\frac{\sum_{k=0}^{n^2} k}{\sum_{k=0}^n k}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , en utilisant la formule  $1 + 2 + \dots + p = \frac{p(p+1)}{2}$ . ....

**Calcul 1.8 — Décomposition en somme d'une partie entière et d'une partie décimale.**



Soit  $k \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$  et  $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$ . Écrire les fractions suivantes sous la forme  $a + \frac{b}{c}$  avec  $b < c$ .

- a)  $\frac{29}{6}$  .....       b)  $\frac{k}{k-1}$  ...       c)  $\frac{3x-1}{x-2}$  ..

**Calcul 1.9 — Un produit de fractions.**



Soit  $t \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ . On donne  $A = \frac{1}{1+t^2} - \frac{1}{(1+t)^2}$  et  $B = (1+t^2)(1+t)^2$ .

Simplifier  $AB$  autant que possible. ....

## Comparaison

**Calcul 1.10 — Règles de comparaison.**



Comparer les fractions suivantes avec le signe « > », « < » ou « = ».

- a)  $\frac{3}{5} \dots \frac{5}{9}$  .....       b)  $\frac{12}{11} \dots \frac{10}{12}$  .....       c)  $\frac{125}{25} \dots \frac{105}{21}$  .....

**Calcul 1.11 — Produit en croix.**



Les nombres  $A = \frac{33\ 215}{66\ 317}$  et  $B = \frac{104\ 348}{208\ 341}$  sont-ils égaux? Oui ou non? .....

**Calcul 1.12 — Produit en croix.**



On pose  $A = \frac{100\ 001}{1\ 000\ 001}$  et  $B = \frac{1\ 000\ 001}{10\ 000\ 001}$  : a-t-on  $A > B$ ,  $A = B$  ou  $A < B$ ? .....

## Puissances

### Prérequis

Opérations sur les puissances (produits, quotients), décomposition en facteurs premiers, sommes d'expressions fractionnaires (même dénominateur), identités remarquables, factorisations et développements simples.

### Calcul 2.1



Dans chaque cas, donner le résultat sous la forme d'une puissance de 10.

a)  $10^5 \cdot 10^3$  .....       c)  $\frac{10^5}{10^3}$  .....       e)  $\frac{(10^5 \cdot 10^{-3})^5}{(10^{-5} \cdot 10^3)^{-3}}$  .....

b)  $(10^5)^3$  .....       d)  $\frac{10^{-5}}{10^{-3}}$  .....       f)  $\frac{(10^3)^{-5} \cdot 10^5}{10^3 \cdot 10^{-5}}$  .....

### Calcul 2.2



Dans chaque cas, donner le résultat sous la forme  $a^n$  avec  $a$  et  $n$  deux entiers relatifs.

a)  $3^4 \cdot 5^4$  .....       c)  $\frac{2^5}{2^{-2}}$  .....       e)  $\frac{6^5}{2^5}$  .....

b)  $(5^3)^{-2}$  .....       d)  $(-7)^3 \cdot (-7)^{-5}$  .....       f)  $\frac{(30^4)^7}{2^{28} \cdot 5^{28}}$  .....

### Calcul 2.3



Dans chaque cas, donner le résultat sous la forme  $2^n \cdot 3^p$ , où  $n$  et  $p$  sont deux entiers relatifs.

a)  $\frac{2^3 \cdot 3^2}{3^4 \cdot 2^8 \cdot 6^{-1}}$  .....       c)  $\frac{3^{22} + 3^{21}}{3^{22} - 3^{21}}$  .....

b)  $2^{21} + 2^{22}$  .....       d)  $\frac{(3^2 \cdot (-2)^4)^8}{((-3)^5 \cdot 2^3)^{-2}}$  .....

### Calcul 2.4



Dans chaque cas, simplifier au maximum.

a)  $\frac{8^{17} \cdot 6^{-6}}{9^{-3} \cdot 2^{42}}$  .....       c)  $\frac{12^{-2} \cdot 15^4}{25^2 \cdot 18^{-4}}$  .....

b)  $\frac{55^2 \cdot 121^{-2} \cdot 125^2}{275 \cdot 605^{-2} \cdot 25^4}$  .....       d)  $\frac{36^3 \cdot 70^5 \cdot 10^2}{14^3 \cdot 28^2 \cdot 15^6}$  .....

### Calcul 2.5



Dans chaque cas, simplifier au maximum l'expression en fonction du réel  $x$ .

a)  $\frac{x}{x-1} - \frac{2}{x+1} - \frac{2}{x^2-1}$  .....       c)  $\frac{x^2}{x^2-x} + \frac{x^3}{x^3+x^2} - \frac{2x^2}{x^3-x}$  .....

b)  $\frac{2}{x+2} - \frac{1}{x-2} + \frac{8}{x^2-4}$  .....       d)  $\frac{1}{x} + \frac{x+2}{x^2-4} + \frac{2}{x^2-2x}$  .....

**Prérequis**  
 Les identités remarquables!

## Développer, réduire et ordonner

Dans cette section, on tâchera de mener les calculs avec le minimum d'étapes. Idéalement, on écrira directement le résultat. La variable  $x$  représente un nombre réel (ou complexe).

### Calcul 3.1



Développer, réduire et ordonner les expressions suivantes selon les puissances décroissantes de  $x$ .

- |  |                      |                                 |                      |
|--|----------------------|---------------------------------|----------------------|
| a) $\left(2x - \frac{1}{2}\right)^3$ ..... | <input type="text"/> | d) $(x+1)^2(x-1)(x^2+x+1)$ .... | <input type="text"/> |
| b) $(x-1)^3(x^2+x+1)$ .....                | <input type="text"/> | e) $(x-1)^2(x+1)(x^2+x+1)$ .... | <input type="text"/> |
| c) $(x+1)^2(x-1)(x^2-x+1)$ ....            | <input type="text"/> | f) $(x^2+x+1)(x^2-x+1)$ .....   | <input type="text"/> |

### Calcul 3.2



Développer, réduire et ordonner les expressions polynomiales suivantes selon les puissances croissantes de  $x$ .

- |  |                      |
|--|----------------------|
| a) $(x-2)^2(-x^2+3x-1) - (2x-1)(x^3+2)$ .....                    | <input type="text"/> |
| b) $(2x+3)(5x-8) - (2x-4)(5x-1)$ .....                           | <input type="text"/> |
| c) $\left((x+1)^2(x-1)(x^2-x+1)+1\right)x - x^6 - x^5 + 2$ ..... | <input type="text"/> |
| d) $(x+1)(x-1)^2 - 2(x^2+x+1)$ .....                             | <input type="text"/> |
| e) $(x^2 + \sqrt{2}x + 1)(1 - \sqrt{2}x + x^2)$ .....            | <input type="text"/> |
| f) $(x^2 + x + 1)^2$ .....                                       | <input type="text"/> |

## Factoriser

### Calcul 3.3 — Petite mise en jambe.



Factoriser les expressions polynomiales de la variable réelle  $x$  suivantes.

- |                                       |                      |
|---------------------------------------|----------------------|
| a) $-(6x+7)(6x-1) + 36x^2 - 49$ ..... | <input type="text"/> |
| b) $25 - (10x+3)^2$ .....             | <input type="text"/> |
| c) $(6x-8)(4x-5) + 36x^2 - 64$ .....  | <input type="text"/> |
| d) $(-9x-8)(8x+8) + 64x^2 - 64$ ..... | <input type="text"/> |

**Calcul 3.4 — À l'aide de la forme canonique.**



Factoriser les polynômes de degré deux suivants en utilisant leur forme canonique. On rappelle que la forme canonique de  $ax^2 + bx + c$  est  $a \left[ \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right]$  (où  $a \neq 0$ ).

- |                         |                      |                           |                      |
|-------------------------|----------------------|---------------------------|----------------------|
| a) $x^2 - 2x + 1$ ..... | <input type="text"/> | d) $3x^2 + 7x + 1$ .....  | <input type="text"/> |
| b) $x^2 + 4x + 4$ ..... | <input type="text"/> | e) $2x^2 + 3x - 28$ ..... | <input type="text"/> |
| c) $x^2 + 3x + 2$ ..... | <input type="text"/> | f) $-5x^2 + 6x - 1$ ..... | <input type="text"/> |

**Calcul 3.5 — Avec plusieurs variables.**



Factoriser sur  $\mathbb{R}$  les expressions polynomiales suivantes dont les variables représentent des nombres réels.

- |                                      |                      |  |                      |
|--------------------------------------|----------------------|--|----------------------|
| a) $(x + y)^2 - z^2$ .....           | <input type="text"/> | d) $xy - x - y + 1$ .....                  | <input type="text"/> |
| b) $x^2 + 6xy + 9y^2 - 169x^2$ ..... | <input type="text"/> | e) $x^3 + x^2y + 2x^2 + 2xy + x + y$ ..    | <input type="text"/> |
| c) $xy + x + y + 1$ .....            | <input type="text"/> | f) $y^2(a^2 + b^2) + 16x^4(-a^2 - b^2)$ .. | <input type="text"/> |

**Calcul 3.6 — On passe au niveau supérieur.**



Factoriser sur  $\mathbb{R}$  les expressions polynomiales suivantes dont les variables représentent des nombres réels.

- |   |                      |
|---|----------------------|
| a) $x^4 - 1$ .....  | <input type="text"/> |
| b) $(-9x^2 + 24)(8x^2 + 8) + 64x^4 - 64$ .....  | <input type="text"/> |
| c) $x^4 + x^2 + 1$ .....  | <input type="text"/> |
| d) $(ac + bd)^2 + (ad - bc)^2$ .....  | <input type="text"/> |
| e) $(ap + bq + cr + ds)^2 + (aq - bp - cs + dr)^2 + (ar + bs - cp - dq)^2 + (as - br + cq - dp)^2$ .. | <input type="text"/> |

## Racines carrées

### Prérequis

Racines carrées. Méthode de la quantité conjuguée.

## Premiers calculs

### Calcul 4.1 — Définition de la racine carrée.



Exprimer sans racine carrée les expressions suivantes.

a)  $\sqrt{(-5)^2}$  .....

d)  $\sqrt{(2 - \sqrt{7})^2}$  .....

b)  $\sqrt{(\sqrt{3} - 1)^2}$  .....

e)  $\sqrt{(3 - \pi)^2}$  .....

c)  $\sqrt{(\sqrt{3} - 2)^2}$  .....

f)  $\sqrt{(3 - a)^2}$  .....

### Calcul 4.2 — Transformation d'écriture.



Écrire aussi simplement que possible les expressions suivantes.

a)  $(2\sqrt{5})^2$  .....

e)  $(3 + \sqrt{7})^2 - (3 - \sqrt{7})^2$  .....

b)  $(2 + \sqrt{5})^2$  .....

f)  $(\sqrt{2\sqrt{3}})^4$  .....

c)  $\sqrt{4 + 2\sqrt{3}}$  .....

g)  $\left(\frac{5 - \sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)^2$  .....

d)  $\sqrt{11 + 6\sqrt{2}}$  .....

h)  $(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 + (\sqrt{2} - \sqrt{3})^2$  .....

## Avec la méthode de la quantité conjuguée

### Calcul 4.3



Rendre rationnels les dénominateurs des expressions suivantes.

a)  $\frac{2 - \sqrt{3}}{2 + \sqrt{2}}$  .....

e)  $\frac{1}{\sqrt{2} - \sqrt{3}}$  .....

b)  $\frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} + 1}$  .....

f)  $\frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{1 - \sqrt{3}}$  .....

c)  $\frac{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}}{\sqrt{2} + \sqrt{3}}$  .....

g)  $\frac{5 + 2\sqrt{6}}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} + \frac{5 - 2\sqrt{6}}{\sqrt{2} - \sqrt{3}}$  .....

d)  $\frac{\sqrt{5} - \sqrt{2}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}$  .....

h)  $\left(\frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{3} + 1}\right)^2$  .....

**Calcul 4.4**

Exprimer la quantité suivante sans racine carrée au dénominateur.

$$\frac{1}{1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}} \dots\dots\dots \boxed{\phantom{000}}$$

**Calculs variés****Calcul 4.5 — Avec une variable.**On considère la fonction  $f$  qui à  $x > 1$  associe  $f(x) = \sqrt{x-1}$ . Pour tout  $x > 1$ , calculer et simplifier les expressions suivantes.

- |  |                      |                                |                      |
|--|----------------------|--------------------------------|----------------------|
| a) $f(x) + \frac{1}{f(x)}$ .....               | <input type="text"/> | d) $\frac{f'(x)}{f(x)}$ .....  | <input type="text"/> |
| b) $\frac{f(x+2) - f(x)}{f(x+2) + f(x)}$ ..... | <input type="text"/> | e) $f(x) + 4f''(x)$ .....      | <input type="text"/> |
| c) $\sqrt{x+2f(x)}$ .....                      | <input type="text"/> | f) $\frac{f(x)}{f''(x)}$ ..... | <input type="text"/> |

**Calcul 4.6 — Mettre au carré.**

Élever les quantités suivantes au carré pour en donner une expression simplifiée.

- |  |                      |  |                      |
|--|----------------------|--|----------------------|
| a) $\sqrt{3 + \sqrt{5}} - \sqrt{3 - \sqrt{5}}$ ..... | <input type="text"/> | b) $\sqrt{3 - 2\sqrt{2}} + \sqrt{3 + 2\sqrt{2}}$ ..... | <input type="text"/> |
|--|----------------------|--|----------------------|

**Calcul 4.7 — Méli-mélo.**

Donner une écriture simplifiée des réels suivants.

- |   |                      |  |                      |
|---|----------------------|--|----------------------|
| a) $\frac{3 - \sqrt{5}}{2 + \sqrt{5}}$ .....        | <input type="text"/> | d) $3e^{-\frac{1}{2} \ln 3}$ .....                           | <input type="text"/> |
| b) $\sqrt{3 + 2\sqrt{2}}$ .....                     | <input type="text"/> | e) $2\sqrt{\frac{3 + \sqrt{5}}{2}}$ .....                    | <input type="text"/> |
| c) $\sqrt{\frac{2 + \sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}}}$ ..... | <input type="text"/> | f) $\frac{1}{2} \ln \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} - 1}$ ..... | <input type="text"/> |

**Calcul 4.8**

Simplifier  $\sqrt[3]{3 + \sqrt{9 + \frac{125}{27}}} - \sqrt[3]{-3 + \sqrt{9 + \frac{125}{27}}}$ .

On commencera par exprimer  $A^3$  en fonction de  $A$ . .....

## Expressions algébriques

## Prérequis

Identités remarquables.

## Équations polynomiales

## Calcul 5.1 — Cubique.

Soit  $a$  un nombre réel tel que  $a^3 - a^2 + 1 = 0$ .Exprimer les quantités suivantes sous la forme  $xa^2 + ya + z$  où  $x, y, z$  sont trois nombres rationnels.

a)  $(a + 2)^3$  .....

c)  $a^{12}$  .....

b)  $a^5 - a^6$  .....

d)  $\frac{1}{a} + \frac{1}{a^2}$  .....

## Calcul 5.2 — Introduction aux nombres complexes.

Soit  $i$  un nombre tel que  $i^2 = -1$ .Exprimer les quantités suivantes sous la forme  $x + iy$  où  $x, y$  sont deux réels.

a)  $(3 + i)^2$  .....

c)  $(3 - i)^3$  .....

b)  $(3 - i)^2$  .....

d)  $(3 - 2i)^3$  .....

## Calcul 5.3



Même exercice.

a)  $(4 - 5i)(6 + 3i)$  .....

c)  $(-4 + i\sqrt{5})^3$  .....

b)  $(2 + 3i)^3(2 - 3i)^3$  .....

d)  $(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})^3$  .....

## Calcul 5.4 — Puissance cinquième.

Soit  $a$  un nombre distinct de 1 tel que  $a^5 = 1$ . Calculer les nombres suivants :

a)  $a^7 - 3a^6 + 4a^5 - a^2 + 3a - 1$  .....

b)  $a^{1234} \times a^{2341} \times a^{3412} \times a^{4123}$  .....

c)  $\prod_{k=0}^{1234} a^k$  .....

d)  $1 + a + a^2 + a^3 + a^4$  .....

e)  $\sum_{k=1}^{99} a^k$  .....

f)  $\prod_{k=0}^4 (2 - a^k)$  .....

# Expressions symétriques

## Calcul 5.5 — Inverse.



Soit  $x$  un réel non nul. On pose  $a = x - \frac{1}{x}$ . Exprimer les quantités suivantes en fonction de  $a$  uniquement.

- a)  $x^2 + \frac{1}{x^2}$  .....       b)  $x^3 - \frac{1}{x^3}$  .....       c)  $x^4 + \frac{1}{x^4}$  .....

## Calcul 5.6 — Trois variables.



Soient  $x, y, z$  trois nombres deux à deux distincts. On pose

$$a = x + y + z, \quad b = xy + yz + zx \quad \text{et} \quad c = xyz.$$

Exprimer les quantités suivantes en fonction de  $a, b, c$  uniquement.

- a)  $x^2 + y^2 + z^2$  .....
- b)  $x^2(y + z) + y^2(z + x) + z^2(x + y)$  .....
- c)  $x^3 + y^3 + z^3$  .....
- d)  $(x + y)(y + z)(z + x)$  .....
- e)  $x^2yz + y^2zx + z^2xy$  .....
- f)  $x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2$  .....

## Calcul 5.7



Même exercice.

- a)  $x^3(y + z) + y^3(z + x) + z^3(x + y)$  .....
- b)  $x^4 + y^4 + z^4$  .....
- c)  $\frac{x}{(x - y)(x - z)} + \frac{y}{(y - z)(y - x)} + \frac{z}{(z - x)(z - y)}$  .....
- d)  $\frac{x^2}{(x - y)(x - z)} + \frac{y^2}{(y - z)(y - x)} + \frac{z^2}{(z - x)(z - y)}$  .....
- e)  $\frac{x^3}{(x - y)(x - z)} + \frac{y^3}{(y - z)(y - x)} + \frac{z^3}{(z - x)(z - y)}$  .....

## Équations du second degré

### Prérequis

Relations entre coefficients et racines.

Dans cette fiche :

- tous les trinômes considérés sont réels ;
- on ne s'intéresse qu'à leurs éventuelles **racines réelles** ;
- tous les paramètres sont choisis de telle sorte que l'équation considérée soit bien de degré 2.

Les formules donnant explicitement les racines d'une équation du second degré en fonction du discriminant **ne servent nulle part** dans cette fiche d'exercices !

## Recherche de racines

### Calcul 6.1 — Des racines vraiment évidentes.



Résoudre mentalement les équations suivantes. *Les racines évidentes sont à chercher parmi 0, 1, -1, 2, -2 ainsi éventuellement que 3 et -3.*

- |  |  |
|--|--|
| a) $x^2 - 6x + 9 = 0$ ..... <input style="width: 80px; height: 25px;" type="text"/>  | f) $2x^2 + 3x = 0$ ..... <input style="width: 80px; height: 25px;" type="text"/>       |
| b) $9x^2 + 6x + 1 = 0$ ..... <input style="width: 80px; height: 25px;" type="text"/> | g) $2x^2 + 3 = 0$ ..... <input style="width: 80px; height: 25px;" type="text"/>        |
| c) $x^2 + 4x - 12 = 0$ ..... <input style="width: 80px; height: 25px;" type="text"/> | h) $x^2 + 4x - 5 = 0$ ..... <input style="width: 80px; height: 25px;" type="text"/>    |
| d) $x^2 - 5x + 6 = 0$ ..... <input style="width: 80px; height: 25px;" type="text"/>  | i) $3x^2 - 11x + 8 = 0$ ..... <input style="width: 80px; height: 25px;" type="text"/>  |
| e) $x^2 - 5x = 0$ ..... <input style="width: 80px; height: 25px;" type="text"/>      | j) $5x^2 + 24x + 19 = 0$ ..... <input style="width: 80px; height: 25px;" type="text"/> |

### Calcul 6.2 — Somme et produit.



Résoudre mentalement les équations suivantes.

- |   |  |
|---|--|
| a) $x^2 - 13x + 42 = 0$ ..... <input style="width: 80px; height: 25px;" type="text"/> | d) $x^2 - 8x - 33 = 0$ ..... <input style="width: 80px; height: 25px;" type="text"/>         |
| b) $x^2 + 8x + 15 = 0$ ..... <input style="width: 80px; height: 25px;" type="text"/>  | e) $x^2 - (a + b)x + ab = 0$ ..... <input style="width: 80px; height: 25px;" type="text"/>   |
| c) $x^2 + 18x + 77 = 0$ ..... <input style="width: 80px; height: 25px;" type="text"/> | f) $x^2 - 2ax + a^2 - b^2 = 0$ ..... <input style="width: 80px; height: 25px;" type="text"/> |

### Calcul 6.3 — L'une grâce à l'autre.



Calculer la seconde racine des équations suivantes.

- |   |   |
|---|---|
| a) $3x^2 - 14x + 8 = 0$ sachant que $x = 4$ est racine .....                  | <input style="width: 80px; height: 25px;" type="text"/> |
| b) $7x^2 + 23x + 6 = 0$ sachant que $x = -3$ est racine .....                 | <input style="width: 80px; height: 25px;" type="text"/> |
| c) $mx^2 + (2m + 1)x + 2 = 0$ sachant que $x = -2$ est racine .....           | <input style="width: 80px; height: 25px;" type="text"/> |
| d) $(m + 3)x^2 - (m^2 + 5m)x + 2m^2 = 0$ sachant que $x = m$ est racine ..... | <input style="width: 80px; height: 25px;" type="text"/> |

**Calcul 6.4 — Racine évidente.**



Trouver une racine des équations suivantes et calculer l'autre en utilisant les relations entre les coefficients du trinôme et ses racines.

Seuls les deux derniers calculs ne se font pas de tête.

- a)  $(b - c)x^2 + (c - a)x + (a - b) = 0$  .....
- b)  $a(b - c)x^2 + b(c - a)x + c(a - b) = 0$  .....
- c)  $(x + a)(x + b) = (m + a)(m + b)$  .....
- d)  $(b - c)x^2 + (c - a)mx + (a - b)m^2 = 0$  .....
- e)  $\frac{x}{a} + \frac{b}{x} = \frac{m}{a} + \frac{b}{m}$  .....
- f)  $\frac{1}{x - a} + \frac{1}{x - b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$  .....

## Recherche d'équations

**Calcul 6.5 — À la recherche de l'équation.**



En utilisant la somme et le produit des racines d'une équation du second degré, former l'équation du second degré admettant comme racines les nombres suivants.

- a) 9 et 13 .....
- b) -11 et 17 .....
- c)  $2 + \sqrt{3}$  et  $2 - \sqrt{3}$  .....
- d)  $m + \sqrt{m^2 - 3}$  et  $m - \sqrt{m^2 - 3}$  .....
- e)  $m + 3$  et  $\frac{2m - 5}{2}$  .....
- f)  $\frac{m + 1}{m}$  et  $\frac{m - 2}{m}$  .....

**Calcul 6.6 — Avec le discriminant.**



Déterminer la valeur à donner à  $m$  pour que les équations suivantes admettent une racine double, et préciser la valeur de la racine dans ce cas.

- a)  $x^2 - (2m + 3)x + m^2 = 0$  .....
- b)  $(m + 2)x^2 - 2(m - 1)x + 4 = 0$  .....
- c)  $(m + 3)x^2 + 2(3m + 1)x + (m + 3) = 0$  .....

## Factorisations et signe

### Calcul 6.7 — Factorisation à vue.



Déterminer de tête les valeurs des paramètres  $a$  et  $b$  pour que les égalités suivantes soient vraies pour tout  $x$ .

a)  $2x^2 + 7x + 6 = (x + 2)(ax + b)$  .....

b)  $-4x^2 + 4x - 1 = (2x - 1)(ax + b)$  .....

c)  $-3x^2 + 14x - 15 = (x - 3)(ax + b)$  .....

d)  $\frac{1}{2}x^2 + \frac{11}{2}x - 40 = (x - 5)(ax + b)$  .....

e)  $x^2 + 2\sqrt{7}x - 21 = (x - \sqrt{7})(ax + b)$  .....

### Calcul 6.8 — Signe d'un trinôme.



Déterminer l'ensemble des valeurs de  $x$  pour lesquelles les expressions suivantes sont positives ou nulles.

a)  $x^2 - (\sqrt{2} + 1)x + \sqrt{2}$  .....

b)  $-x^2 + 2x + 15$  .....

c)  $(x + 1)(3x - 2)$  .....

d)  $\frac{x - 4}{2x + 1}$  .....

# Exponentielle et Logarithme

## Prérequis

Exponentielle, logarithme.

## Logarithmes

### Calcul 7.1 ⌚⌚⌚⌚

Calculer les nombres suivants en fonction de  $\ln 2$ ,  $\ln 3$  et  $\ln 5$ .

- |   |   |
|---|---|
| a) $\ln 16$ ..... <input style="width: 100px; height: 20px;" type="text"/>    | d) $\frac{1}{8} \ln \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \ln \frac{1}{8}$ ..... <input style="width: 100px; height: 20px;" type="text"/> |
| b) $\ln 512$ ..... <input style="width: 100px; height: 20px;" type="text"/>   | e) $\ln 72 - 2 \ln 3$ ..... <input style="width: 100px; height: 20px;" type="text"/>  |
| c) $\ln 0,125$ ..... <input style="width: 100px; height: 20px;" type="text"/> | f) $\ln 36$ ..... <input style="width: 100px; height: 20px;" type="text"/>  |

### Calcul 7.2 ⌚⌚⌚⌚

Calculer les nombres suivants en fonction de  $\ln 2$ ,  $\ln 3$  et  $\ln 5$ .

- |  |   |
|--|---|
| a) $\ln \frac{1}{12}$ ..... <input style="width: 100px; height: 20px;" type="text"/>                 | d) $\ln 500$ ..... <input style="width: 100px; height: 20px;" type="text"/>           |
| b) $\ln(2,25)$ ..... <input style="width: 100px; height: 20px;" type="text"/>                        | e) $\ln \frac{16}{25}$ ..... <input style="width: 100px; height: 20px;" type="text"/> |
| c) $\ln 21 + 2 \ln 14 - 3 \ln(0,875)$ ..... <input style="width: 100px; height: 20px;" type="text"/> | f) $\ln(6,25)$ ..... <input style="width: 100px; height: 20px;" type="text"/>         |

### Calcul 7.3 ⌚⌚⌚⌚

Calculer les nombres suivants en fonction de  $\ln 2$ ,  $\ln 3$  et  $\ln 5$ .

$\ln \frac{1}{2} + \ln \frac{2}{3} + \dots + \ln \frac{98}{99} + \ln \frac{99}{100}$  .....

### Calcul 7.4 — Logarithme et radicaux. ⌚⌚⌚⌚

- a) On pose  $\alpha = \frac{7}{16} \ln(3 + 2\sqrt{2}) - 4 \ln(\sqrt{2} + 1)$ . Calculer  $(1 + \sqrt{2})^2$  et  $\frac{1}{\sqrt{2} + 1}$ .

En déduire une écriture simplifiée de  $\alpha$  en fonction de  $\ln(\sqrt{2} - 1)$ .....

- b) Calculer  $\beta$  sachant que  $\ln \beta = \ln(7 + 5\sqrt{2}) + 8 \ln(\sqrt{2} + 1) + 7 \ln(\sqrt{2} - 1)$  .....

- c) Simplifier  $\gamma = \ln((2 + \sqrt{3})^{20}) + \ln((2 - \sqrt{3})^{20})$  .....

- d) Simplifier  $\delta = \ln\left(\frac{\sqrt{5} + 1}{2}\right) + \ln\left(\frac{\sqrt{5} - 1}{2}\right)$  .....

# Exponentielles

## Calcul 7.5



Écrire les nombres suivants le plus simplement possible.

a)  $e^{3 \ln 2}$  .....

d)  $e^{-2 \ln 3}$  .....

b)  $\ln(\sqrt{e})$  .....

e)  $\ln(e^{-\frac{1}{2}})$  .....

c)  $\ln(e^{\frac{1}{3}})$  .....

f)  $e^{\ln 3 - \ln 2}$  .....

## Calcul 7.6



Écrire les nombres suivants le plus simplement possible.

a)  $-e^{-\ln \frac{1}{2}}$  .....

d)  $\ln(\sqrt{e^4}) - \ln(\sqrt{e^2})$  .....

b)  $e^{-\ln \ln 2}$  .....

e)  $\ln(\sqrt{\exp(-\ln e^2)})$  .....

c)  $\ln\left(\frac{1}{e^{17}}\right)$  .....

f)  $\exp\left(-\frac{1}{3} \ln(e^{-3})\right)$  .....

# Études de fonctions

## Calcul 7.7 — Parité.



Étudier la parité des fonctions suivantes.

a)  $f_1 : x \mapsto \ln \frac{2021+x}{2021-x}$  .....

b)  $f_2 : x \mapsto \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$  .....

c)  $f_3 : x \mapsto \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$  .....

d)  $f_4 : x \mapsto \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$  .....

## Calcul 7.8 — Étude d'une fonction.



Soit  $f : x \mapsto \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ .

a) Préciser l'ensemble de définition de cette fonction. ....

b) Montrer que pour tous réels  $a$  et  $b$  on a  $f(a+b) = \frac{f(a)+f(b)}{1+f(a)f(b)}$ . ....

c) Déterminer la limite de  $f$  en  $+\infty$ . ....

d) Déterminer la limite de  $f$  en  $-\infty$ . ....

### Calcul 7.9



On considère l'application

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \ln(1+x) \end{cases}$$

Calculer et simplifier les expressions suivantes pour tout  $x \in \mathbb{R}$  pour lequel elles sont définies.

- a)  $f(2e^x - 1)$  .....       d)  $xf'(x) - 1$  .....
- b)  $e^{x - \frac{1}{2}f(x)}$  .....       e)  $e^{\frac{f(x)}{f'(x-1)}}$  .....
- c)  $\frac{1}{2}f(x^2 - 2x)$  .....

## Équations, inéquations

### Calcul 7.10



Résoudre les équations ou inéquations suivantes.

- a)  $e^{3x-5} \geq 12$  .....
- b)  $1 \leq e^{-x^2+x}$  .....
- c)  $e^{1+\ln x} \geq 2$  .....
- d)  $e^{-6x} \leq \sqrt{e}$  .....
- e)  $\ln(-x-5) = \ln(x-61) - \ln(x+7)$  .....
- f)  $\ln(-x-5) = \ln \frac{x-61}{x+7}$  .....

# Trigonométrie

## Prérequis

Relation  $\cos^2 + \sin^2 = 1$ . Symétrie et périodicité de sin et cos.  
Formules d'addition et de duplication. Fonction tangente.

Dans toute cette fiche,  $x$  désigne une quantité réelle.

## Valeurs remarquables de cosinus et sinus

### Calcul 8.1



Simplifier :

a)  $\cos \frac{\pi}{4} + \cos \frac{3\pi}{4} + \cos \frac{5\pi}{4} + \cos \frac{7\pi}{4}$  .

c)  $\tan \frac{2\pi}{3} + \tan \frac{3\pi}{4} + \tan \frac{5\pi}{6} + \tan \frac{7\pi}{6}$

b)  $\sin \frac{5\pi}{6} + \sin \frac{7\pi}{6}$  .....

d)  $\cos^2 \frac{4\pi}{3} - \sin^2 \frac{4\pi}{3}$  .....

## Propriétés remarquables de cosinus et sinus

### Calcul 8.2



Simplifier :

a)  $\sin(\pi - x) + \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$  .....

c)  $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$  .....

b)  $\sin(-x) + \cos(\pi + x) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

d)  $\cos(x - \pi) + \sin\left(-\frac{\pi}{2} - x\right)$  .....

## Formules d'addition

### Calcul 8.3



Calculer les quantités suivantes.

a)  $\cos \frac{5\pi}{12}$  (on a  $\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{12}$ ) .....

c)  $\sin \frac{\pi}{12}$  .....

b)  $\cos \frac{\pi}{12}$  .....

d)  $\tan \frac{\pi}{12}$  .....

### Calcul 8.4



a) Simplifier :  $\sin(4x) \cos(5x) - \sin(5x) \cos(4x)$  .....

b) Simplifier :  $\frac{\sin 2x}{\sin x} - \frac{\cos 2x}{\cos x}$  (pour  $x \in ]0, \frac{\pi}{2}[$ ) .....

c) Simplifier :  $\cos x + \cos\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(x + \frac{4\pi}{3}\right)$  .....

d) Expliciter  $\cos(3x)$  en fonction de  $\cos x$  .....

## Formules de duplication

### Calcul 8.5



En remarquant qu'on a  $\frac{\pi}{4} = 2 \times \frac{\pi}{8}$ , calculer :

a)  $\cos \frac{\pi}{8}$  .....

b)  $\sin \frac{\pi}{8}$  .....

### Calcul 8.6



a) Simplifier :  $\frac{1 - \cos(2x)}{\sin(2x)}$  (avec  $x \in ]0, \frac{\pi}{2}[$ ) .....

b) Simplifier :  $\frac{\sin 3x}{\sin x} - \frac{\cos 3x}{\cos x}$  (pour  $x \in ]0, \frac{\pi}{2}[$ ) .....

c) Expliciter  $\cos(4x)$  en fonction de  $\cos x$  .....

## Équations trigonométriques

### Calcul 8.7



Résoudre dans  $[0, 2\pi]$ , dans  $[-\pi, \pi]$ , puis dans  $\mathbb{R}$  les équations suivantes :

a)  $\cos x = \frac{1}{2}$  .....

f)  $|\tan x| = \frac{1}{\sqrt{3}}$  .....

b)  $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$  .....

g)  $\cos(2x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$  .....

c)  $\sin x = \cos \frac{2\pi}{3}$  .....

h)  $2 \sin^2 x + \sin x - 1 = 0$  .....

d)  $\tan x = -1$  .....

i)  $\cos x = \cos \frac{\pi}{7}$  .....

e)  $\cos^2 x = \frac{1}{2}$  .....

j)  $\sin x = \cos \frac{\pi}{7}$  .....

## Inéquations trigonométriques

### Calcul 8.8



Résoudre dans  $[0, 2\pi]$ , puis dans  $[-\pi, \pi]$ , les inéquations suivantes :

a)  $\cos x \geq -\frac{\sqrt{2}}{2}$  .....

e)  $\tan x \geq 1$  .....

b)  $\cos x \leq \cos \frac{\pi}{3}$  .....

f)  $|\tan x| \geq 1$  .....

c)  $\sin x \leq \frac{1}{2}$  .....

g)  $\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \geq 0$  .....

d)  $|\sin x| \leq \frac{1}{2}$  .....

h)  $\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) \geq 0$  .....

## Dérivation

### Prérequis

Dérivées des fonctions usuelles. Formules de dérivation.

## Application des formules usuelles

### Calcul 9.1 — Avec des produits.



Déterminer l'expression de  $f'(x)$  pour  $f$  définie par :

a)  $x \in \mathbb{R}$  et  $f(x) = (x^2 + 3x + 2)(2x - 5)$ . .....

b)  $x \in \mathbb{R}$  et  $f(x) = (x^3 + 3x + 2)(x^2 - 5)$ . .....

c)  $x \in \mathbb{R}$  et  $f(x) = (x^2 - 2x + 6) \exp(2x)$ . .....

d)  $x \in ]2, +\infty[$  et  $f(x) = (3x^2 - x) \ln(x - 2)$  .....

### Calcul 9.2 — Avec des puissances.



Déterminer l'expression de  $f'(x)$  pour  $f$  définie par :

a)  $x \in \mathbb{R}$  et  $f(x) = (x^2 - 5x)^5$ . .....

b)  $x \in \mathbb{R}$  et  $f(x) = (2x^3 + 4x - 1)^2$ . .....

c)  $x \in \mathbb{R}$  et  $f(x) = (\sin(x) + 2 \cos(x))^2$ . .....

d)  $x \in \mathbb{R}$  et  $f(x) = (3 \cos(x) - \sin(x))^3$ . .....

### Calcul 9.3 — Avec des fonctions composées.



Déterminer l'expression de  $f'(x)$  pour  $f$  définie par :

a)  $x \in \mathbb{R}$  et  $f(x) = \ln(x^2 + 1)$ . .....

b)  $x \in ]1, +\infty[$  et  $f(x) = \ln(\ln(x))$ . .....

c)  $x \in \mathbb{R}$  et  $f(x) = (2 - x) \exp(x^2 + x)$ . .....

d)  $x \in \mathbb{R}$  et  $f(x) = \exp(3 \sin(2x))$ . .....

**Calcul 9.4 — Avec des fonctions composées — bis.**



Déterminer l'expression de  $f'(x)$  pour  $f$  définie par :

a)  $x \in \mathbb{R}$  et  $f(x) = \sin\left(\frac{2x^2 - 1}{x^2 + 1}\right)$ . .....

b)  $x \in \mathbb{R}$  et  $f(x) = \cos\left(\frac{2x + 1}{x^2 + 4}\right)$ . .....

c)  $x \in ]0, \pi[$  et  $f(x) = \sqrt{\sin(x)}$ . .....

d)  $x \in ]0, +\infty[$  et  $f(x) = \sin(\sqrt{x})$ . .....

**Calcul 9.5 — Avec des quotients.**



Déterminer l'expression de  $f'(x)$  pour  $f$  définie par :

a)  $x \in \mathbb{R}$  et  $f(x) = \frac{x^2 + 3x}{2 \sin(x) + 3}$ . .....

b)  $x \in ]0, +\infty[$  et  $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{3x + 2}$ . .....

c)  $x \in \mathbb{R}$  et  $f(x) = \frac{\cos(2x + 1)}{x^2 + 1}$ . .....

d)  $x \in ]1, +\infty[$  et  $f(x) = \frac{2x^2 + 3x}{\ln(x)}$ . .....

## Opérations et fonctions composées

**Calcul 9.6**



Déterminer l'expression de  $f'(x)$  pour  $f$  définie par :

a)  $x \in \mathbb{R}^*$  et  $f(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ . .....

b)  $x \in ]-3, 3[$  et  $f(x) = \frac{x}{\sqrt{9 - x^2}}$ . .....

c)  $x \in ]1, +\infty[$  et  $f(x) = \ln\left(\sqrt{\frac{x + 1}{x - 1}}\right)$ . .....

d)  $x \in ]0, \pi[$  et  $f(x) = \ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)$ . .....

# Dériver pour étudier une fonction

## Calcul 9.7



Calculer  $f'(x)$  et écrire le résultat sous forme factorisée.

a)  $x \in \mathbb{R} \setminus \{3, -2\}$  et  $f(x) = \frac{1}{3-x} + \frac{1}{2+x}$ . .....

b)  $x \in ]-1, +\infty[$  et  $f(x) = x^2 - \ln(x+1)$  .....

c)  $x \in ]1, +\infty[$  et  $f(x) = \ln(x^2 + x - 2) - \frac{x+2}{x-1}$ . .....

d)  $x \in ]-1, +\infty[$  et  $f(x) = \frac{x}{x+1} + x - 2\ln(x+1)$ . .....

e)  $x \in ]0, e[ \cup ]e, +\infty[$  et  $f(x) = \frac{1 + \ln(x)}{1 - \ln(x)}$ . .....

## Primitives

### Prérequis

Intégration de Terminale. Dérivée d'une fonction composée.  
Trigonométrie directe et réciproque. Trigonométrie hyperbolique.

Pour chaque fonction à intégrer on pourra commencer par chercher les domaines où elle admet des primitives.

### Calculs directs

#### Calcul 10.1



Déterminer directement une primitive des expressions suivantes.

a)  $\frac{1}{t+1}$  .....

c)  $\frac{3}{(t+2)^3}$  .....

b)  $\frac{3}{(t+2)^2}$  .....

d)  $\sin(4t)$  .....

#### Calcul 10.2



Même exercice.

a)  $\sqrt{1+t} - \sqrt[3]{t}$  .....

c)  $\frac{1}{1+9t^2}$  .....

b)  $e^{2t+1}$  .....

### Utilisation des formulaires

#### Calcul 10.3 — Dérivée d'une fonction composée.



Déterminer une primitive des expressions suivantes en reconnaissant la dérivée d'une fonction composée.

a)  $\frac{2t^2}{1+t^3}$  .....

d)  $\frac{7t}{\sqrt[3]{1+7t^2}}$  .....

b)  $t\sqrt{1+2t^2}$  .....

e)  $\frac{t}{1+3t^2}$  .....

c)  $\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}$  .....

f)  $\frac{12t}{(1+3t^2)^3}$  .....

#### Calcul 10.4 — Dérivée d'une fonction composée – bis.



Même exercice.

a)  $\frac{\ln^3 t}{t}$  .....

d)  $\frac{1}{t^2\sqrt{t}}$  .....

b)  $\frac{1}{t\sqrt{\ln t}}$  .....

e)  $\frac{e^t + e^{-t}}{1 - e^{-t} + e^t}$  .....

c)  $\frac{8e^{2t}}{(3 - e^{2t})^3}$  .....

f)  $\frac{e^{\frac{1}{t}}}{t^2}$  .....

**Calcul 10.5 — Trigonométrie.**



Déterminer une primitive des expressions suivantes en reconnaissant la dérivée d'une fonction composée.

- |  |  |   |
|--|--|---|
| a) $\cos^2 t \sin t$ ..... <input type="text"/>                | f) $\frac{\cos(\pi \ln t)}{t}$ ..... <input type="text"/>        | k) $\frac{1 + \tan^2 t}{\tan^2 t}$ ..... <input type="text"/> |
| b) $\cos(t)e^{\sin t}$ ..... <input type="text"/>              | g) $\tan^2 t$ ..... <input type="text"/>                         | l) $\frac{\cos t}{(1 - \sin t)^3}$ ..... <input type="text"/> |
| c) $\tan t$ ..... <input type="text"/>                         | h) $\tan^3 t$ ..... <input type="text"/>                         | m) $\frac{1}{1 + 4t^2}$ ..... <input type="text"/>            |
| d) $\frac{\cos t}{1 - \sin t}$ ..... <input type="text"/>      | i) $\frac{\tan^3 t}{\cos^2 t}$ ..... <input type="text"/>        | n) $\frac{e^t}{1 + e^{2t}}$ ..... <input type="text"/>        |
| e) $\frac{\sin \sqrt{t}}{\sqrt{t}}$ ..... <input type="text"/> | j) $\frac{1}{\cos^2(t)\sqrt{\tan t}}$ ..... <input type="text"/> |   |

**Calcul 10.6 — Trigonométrie – bis.**



Déterminer une primitive des expressions suivantes en utilisant d'abord le formulaire de trigonométrie.

- |  |   |   |
|--|---|---|
| a) $\cos^2 t$ ..... <input type="text"/>         | d) $\frac{\sin(2t)}{1 + \sin^2 t}$ ..... <input type="text"/> | f) $\frac{1}{\sin^2(t) \cos^2(t)}$ ..... <input type="text"/> |
| b) $\cos(t) \sin(3t)$ ..... <input type="text"/> | e) $\frac{1}{\sin t \cos t}$ ..... <input type="text"/>       | g) $\frac{1}{\sin(4t)}$ ..... <input type="text"/>            |
| c) $\sin^3 t$ ..... <input type="text"/>         |   |   |

**Calcul 10.7 — Fractions rationnelles.**



Déterminer une primitive des expressions suivantes après quelques manipulations algébriques simples.

- |   |   |   |
|---|---|---|
| a) $\frac{t^2 + t + 1}{t^2}$ ..... <input type="text"/> | d) $\frac{t^3 + 1}{t + 1}$ ..... <input type="text"/> | g) $\frac{t - 1}{t^2 + 1}$ ..... <input type="text"/> |
| b) $\frac{t^2 + 1}{t^3}$ ..... <input type="text"/>     | e) $\frac{t - 1}{t + 1}$ ..... <input type="text"/>   | h) $\frac{t}{(t + 1)^2}$ ..... <input type="text"/>   |
| c) $\frac{1 - t^6}{1 - t^2}$ ..... <input type="text"/> | f) $\frac{t^3}{t + 1}$ ..... <input type="text"/>     |   |

## Dériver puis intégrer, intégrer puis dériver

**Calcul 10.8**



Pour chacune des expressions suivantes :

- dériver puis factoriser l'expression ;
- intégrer l'expression.

- |   |  |
|---|--|
| a) $t^2 - 2t + 5$ ..... <input type="text"/>                        | f) $e^{3t-2}$ ..... <input type="text"/>                       |
| b) $\frac{1}{t^2} + \frac{1}{t}$ ..... <input type="text"/>         | g) $\frac{t^2}{t^3 - 1}$ ..... <input type="text"/>            |
| c) $\sqrt{t} - \frac{1}{t^3}$ ..... <input type="text"/>            | h) $\frac{3t - 1}{t^2 + 1}$ ..... <input type="text"/>         |
| d) $\frac{1}{t^4} + \frac{1}{t\sqrt{t}}$ ..... <input type="text"/> | i) $\sin(t) \cos^2(t)$ ... <input type="text"/>                |
| e) $e^{2t} + e^{-3t}$ ..... <input type="text"/>                    | j) $\frac{1}{t^2} \sin \frac{1}{t}$ ..... <input type="text"/> |

k)  $\frac{e^t}{2 + e^t}$  .....

l)  $\frac{\sin t}{2 + 3 \cos t}$  .....

m)  $\frac{t}{\sqrt{1 - t^2}}$  .....

n)  $\frac{\sin 2t}{1 + \cos^2 t}$  .....

o)  $te^{-t^2}$  .....

p)  $\frac{1 - \ln t}{t}$  .....

q)  $\frac{1}{t \ln t}$  .....

r)  $\frac{\sin(\ln t)}{t}$  .....

s)  $\frac{e^t}{1 + e^{2t}}$  .....

**Calcul 10.9 — *Bis repetita.***



Reprendre l'exercice précédent en commençant par intégrer puis en dérivant et factorisant.

## Calcul d'intégrales

### Prérequis

Primitives usuelles, composées simples.

### Intégrales et aires algébriques

On rappelle que  $\int_a^b f(x) dx$  est l'aire algébrique entre la courbe représentative de  $f$  et l'axe des abscisses du repère lorsque les bornes sont « dans le bon sens ».

#### Calcul 11.1



Sans chercher à calculer les intégrales suivantes, donner leur signe.

a)  $\int_{-2}^3 x^2 + e^x dx$  .       b)  $\int_5^{-3} |\sin 7x| dx$        c)  $\int_0^{-1} \sin x dx$  ...

#### Calcul 11.2



En se ramenant à des aires, calculer de tête les intégrales suivantes.

a)  $\int_1^3 7 dx$  .....       c)  $\int_0^7 3x dx$  .....       e)  $\int_{-2}^2 \sin x dx$  ....   
 b)  $\int_7^{-3} -5 dx$  .....       d)  $\int_2^8 1 - 2x dx$  ..       f)  $\int_{-2}^1 |x| dx$  .....

### Calcul d'intégrales

On rappelle que si  $F$  est une primitive de  $f$  alors  $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$ , que l'on note  $\left[ F(x) \right]_a^b$ .

#### Calcul 11.3 — Polynômes.



Calculer les intégrales suivantes.

a)  $\int_{-1}^3 2 dx$  .....       d)  $\int_{-1}^1 3x^5 - 5x^3 dx$  .....   
 b)  $\int_1^3 2x - 5 dx$  .....       e)  $\int_0^1 x^5 - x^4 dx$  .....   
 c)  $\int_{-2}^0 x^2 + x + 1 dx$  .....       f)  $\int_1^{-1} x^{100} dx$  .....

#### Calcul 11.4 — Fonctions usuelles.



Calculer.

a)  $\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \sin x dx$  ...       c)  $\int_1^2 \frac{dx}{x^2}$  .....       e)  $\int_{-3}^2 e^x dx$  .....   
 b)  $\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \cos x dx$  ...       d)  $\int_1^{100} \frac{1}{\sqrt{x}} dx$  ...       f)  $\int_{-3}^{-1} \frac{dx}{x}$  .....

**Calcul 11.5 — De la forme  $f(ax + b)$ .**



Calculer les intégrales suivantes.

a)  $\int_{-1}^2 (2x + 1)^3 dx$  .....

d)  $\int_{-\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{6}} \sin(3x) dx$  .....

b)  $\int_{-2}^4 e^{\frac{1}{2}x+1} dx$  .....

e)  $\int_0^{33} \frac{1}{\sqrt{3x+1}} dx$  .....

c)  $\int_0^1 \frac{dx}{\pi x + 2}$  .....

f)  $\int_{-\pi}^{\frac{\pi}{2}} \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right) dx$  .....

**Calcul 11.6 — Fonctions composées.**



Calculer les intégrales suivantes.

a)  $\int_1^3 \frac{x-2}{x^2-4x+5} dx$  .....

d)  $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}} \sin x (\cos x)^5 dx$  .....

b)  $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} x \sin(x^2 + 1) dx$  .....

e)  $\int_0^1 x e^{x^2-1} dx$  .....

c)  $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \tan x dx$  .....

f)  $\int_0^1 \frac{x}{(x^2+1)^4} dx$  .....

**Calcul 11.7 — Divers.**



Calculer les intégrales suivantes.

a)  $\int_0^1 \frac{e^x}{e^{2x} + 2e^x + 1} dx$  .....

d)  $\int_1^e \frac{3x - 2 \ln x}{x} dx$  .....

b)  $\int_{-2}^3 |x+1| dx$  .....

e)  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2x) \sin(x) dx$  .....

c)  $\int_{-1}^2 \max(1, e^x) dx$  .....

f)  $\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{4}} |\cos x \sin x| dx$  .....

**Calcul 11.8 — Avec les nouvelles fonctions de référence.**



a)  $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx$  .....

c)  $\int_0^1 \sqrt{x} dx$  .....

b)  $\int_0^2 10^x dx$  .....

d)  $\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \frac{2}{1+9x^2} dx$  .....

## Intégration par parties

**Prérequis**

Primitives, dérivées, intégration par parties.

On rappelle le théorème d'intégration par parties. Si  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ , si  $u \in \mathcal{C}^1([a, b], \mathbb{R})$  et si  $v \in \mathcal{C}^1([a, b], \mathbb{R})$ , alors

$$\int_a^b u'(t)v(t) dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t) dt.$$

### Intégrales

**Calcul 12.1**



Calculer :

- |  |  |
|--|--|
| <p>a) <math>\int_0^{\frac{\pi}{2}} t \cos t dt</math> ..... <input style="width: 100px; height: 20px;" type="text"/></p> | <p>f) <math>\int_0^1 \ln(1+t^2) dt</math> ..... <input style="width: 100px; height: 20px;" type="text"/></p>               |
| <p>b) <math>\int_0^2 te^{\frac{t}{2}} dt</math> ..... <input style="width: 100px; height: 20px;" type="text"/></p>       | <p>g) <math>\int_0^1 t \arctan t dt</math> ..... <input style="width: 100px; height: 20px;" type="text"/></p>              |
| <p>c) <math>\int_1^{\ln 2} t2^t dt</math> ..... <input style="width: 100px; height: 20px;" type="text"/></p>             | <p>h) <math>\int_0^1 \frac{t}{\sqrt{1+t}} dt</math> ..... <input style="width: 100px; height: 20px;" type="text"/></p>     |
| <p>d) <math>\int_1^e \ln t dt</math> ..... <input style="width: 100px; height: 20px;" type="text"/></p>                  | <p>i) <math>\int_0^1 \sqrt{1+t} \ln(1+t) dt</math> ..... <input style="width: 100px; height: 20px;" type="text"/></p>      |
| <p>e) <math>\int_1^2 t \ln t dt</math> ..... <input style="width: 100px; height: 20px;" type="text"/></p>                | <p>j) <math>\int_0^{\frac{\pi}{4}} t \tan^2 t dt</math> ..... <input style="width: 100px; height: 20px;" type="text"/></p> |

### Primitives

**Calcul 12.2**



Pour chaque fonction suivante, préciser sur quel ensemble elle est définie, puis en déterminer une primitive.

- |   |  |
|---|--|
| <p>a) <math>x \mapsto (-x+1)e^x</math> ..... <input style="width: 150px; height: 30px;" type="text"/></p>         | <p>c) <math>x \mapsto \arctan(x)</math> ..... <input style="width: 150px; height: 30px;" type="text"/></p> |
| <p>b) <math>x \mapsto \frac{\ln x}{x^2}</math> ..... <input style="width: 150px; height: 30px;" type="text"/></p> |  |

# Intégrations par parties successives

Pour ces calculs de primitives et d'intégrales, on pourra réaliser plusieurs intégrations par parties successives.

## Calcul 12.3 — Calcul d'intégrales.



a)  $\int_0^1 (t^2 + 3t - 4)e^{2t} dt \dots\dots\dots$

b)  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^t \sin t dt \dots\dots\dots$

## Calcul 12.4 — Calcul de primitives.



Calculer des primitives des fonctions suivantes.

a)  $x \mapsto \ln^2 x \dots\dots\dots$

b)  $x \mapsto (x \ln x)^2 \dots\dots\dots$

## Changements de variable

### Prérequis

Primitives, dérivées. Changements de variables. Intégration par parties.

## Changements de variable

### Calcul 13.1



Effectuer le changement de variable indiqué et en déduire la valeur de l'intégrale.

a)  $\int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} dt$  avec  $t = \sin \theta$  .....

b)  $\int_1^3 \frac{1}{\sqrt{t} + \sqrt{t^3}} dt$  avec  $u = \sqrt{t}$  .....

c)  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 t \cos t dt$  avec  $u = \sin t$  .....

d)  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 t \cos^3 t dt$  avec  $u = \sin t$  .....

e)  $\int_1^4 \frac{1}{t + \sqrt{t}} dt$  avec  $u = \sqrt{t}$  .....

### Calcul 13.2



Même exercice.

a)  $\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{3 + \cos^2 t} dt$  avec  $u = \cos t$  .....

b)  $\int_0^1 \frac{1}{2 + e^{-t}} dt$  avec  $u = e^t$  .....

c)  $\int_2^4 \frac{1}{\sqrt{4t-t^2}} dt$  avec  $u = \frac{t}{2} - 1$  .....

d)  $\int_0^1 \frac{1}{(1+t^2)^2} dt$  avec  $t = \tan u$  .....

e)  $\int_{\sqrt{2}}^2 \frac{1}{t\sqrt{t^2-1}} dt$  avec  $u = \frac{1}{t}$  .....

f)  $\int_e^{e^2} \frac{\ln t}{t + t \ln^2 t} dt$  avec  $u = \ln t$  .....

## Changements de variable et intégrations par parties

### Calcul 13.3



Effectuer le changement de variable indiqué, continuer avec une intégration par parties et en déduire la valeur de l'intégrale.

a)  $\int_1^4 e^{\sqrt{t}} dt$  avec  $u = \sqrt{t}$  .....

b)  $\int_3^4 \frac{\ln(\sqrt{t}-1)}{\sqrt{t}} dt$  avec  $u = \sqrt{t}$  .....

## Calculs de primitives par changement de variable

### Calcul 13.4



Déterminer une primitive de  $f$  en utilisant le changement de variable donné.

a)  $x \in ]0, \frac{\pi}{2}[ \mapsto \frac{\cos x + \sin x}{\sin x \cos^2 x}$  avec  $u = \tan x$  .....

b)  $x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \frac{1}{\sqrt{e^x - 1}}$  avec  $u = \sqrt{e^x - 1}$  .....

c)  $x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \frac{1}{x + \sqrt[3]{x}}$  avec  $u = \sqrt[3]{x}$  .....

d)  $x > 1 \mapsto \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}$  avec  $u = \sqrt{x^2 - 1}$  .....

## Systèmes linéaires

### Prérequis

Résolution par substitution d'une variable, par combinaisons linéaires de lignes.

### Systèmes de 2 équations à 2 inconnues

#### Calcul 14.1



Résoudre dans  $\mathbb{R}^2$ .

a)  $\begin{cases} x - 2y = 1 \\ 3x + 4y = 13 \end{cases}$  .....

c)  $\begin{cases} 3x - 6y = -3 \\ 2x + 2y = 2 \end{cases}$  .....

b)  $\begin{cases} 2x + y = 16 \\ x - y = 5 \end{cases}$  .....

d)  $\begin{cases} 3x - 4y = -\sqrt{2} \\ 6x + 2y = 3\sqrt{2} \end{cases}$  .....

#### Calcul 14.2 — Systèmes avec paramètre.



Résoudre dans  $\mathbb{R}^2$  en fonction des valeurs du paramètre  $a \in \mathbb{R}$ .

a)  $\begin{cases} 3x + 2y = 2 \\ 2x + 4y = a \end{cases}$  .....

c)  $\begin{cases} 3x + 5y = a \\ 2x - y = a^2 \end{cases}$  .....

b)  $\begin{cases} x - ay = 3a + 2 \\ ax + y = 2a - 3 \end{cases}$  .....

d)  $\begin{cases} x + 2y = 3a \\ 2x + 3y = 5a - a^2 \end{cases}$  .....

### Systèmes de 2 équations à 3 inconnues

#### Calcul 14.3



Résoudre dans  $\mathbb{R}^3$ .

a)  $\begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ 3x + y - 2z = 3 \end{cases}$  .....

c)  $\begin{cases} x - y + 3z = 5/2 \\ x + 2y - z = 3/2 \end{cases}$  .....

b)  $\begin{cases} 3x - 2y + z = 6 \\ x + 2y - z = -2 \end{cases}$  .....

d)  $\begin{cases} 5x + y + 2z = -5/2 \\ 2x - y + 2z = -5/3 \end{cases}$  .....

### Systèmes de 3 équations à 3 inconnues

#### Calcul 14.4



Résoudre dans  $\mathbb{R}^3$ .

a)  $\begin{cases} x + 2y - z = -3 \\ 2x - y + z = 8 \\ 3x + y + 2z = 11 \end{cases}$  .....

c)  $\begin{cases} x + 3y + z = 1 \\ 2x - y + 2z = -1 \\ x + 10y + z = 0 \end{cases}$  .....

b)  $\begin{cases} a - b - c = -7 \\ 3a + 2b - c = 3 \\ 4a + b + 2c = 4 \end{cases}$  .....

d)  $\begin{cases} 3x + 2y + 3z = 0 \\ 2x - y + 2z = -1 \\ 4x + 5y + 4z = 1 \end{cases}$  .....

**Calcul 14.5**

On considère le système d'inconnues  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  et de paramètre  $a \in \mathbb{R}$  :

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ x + 2y + az = 2 \\ 2x + ay + 2z = 3. \end{cases}$$

Résoudre ce système pour les valeurs de  $a$  proposées.

a)  $a = 0$  .....

c)  $a = 3$  .....

b)  $a = -2$  .....

d)  $a \in \mathbb{R} \setminus \{-2; 3\}$ . .....

**Calcul 14.6**

On considère le système d'inconnues  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  et de paramètres  $(a, c) \in \mathbb{R}^2$  :

$$\begin{cases} x - az = c \\ ax - y = c \\ ay - z = c. \end{cases}$$

Résoudre ce système pour les valeurs de  $a$  et  $c$  proposées.

a)  $a = 2, c = 7$  .....

c)  $a \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$  .....

b)  $a = 1, c = 2$  .....

**Calcul 14.7**

On propose le système d'inconnues  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  et de paramètre  $\lambda \in \mathbb{R}$  :

$$\begin{cases} 4x + y + z = \lambda x \\ x + 4y + z = \lambda y \\ x + y + 4z = \lambda z. \end{cases}$$

Résoudre ce système pour les valeurs de  $\lambda$  proposées.

a)  $\lambda = 1$  .....

c)  $\lambda = 6$  .....

b)  $\lambda = 3$  .....

# Nombres complexes

## Prérequis

Forme algébrique et forme exponentielle.

## Pour s'échauffer

### Calcul 15.1 — Écriture algébrique.



Mettre les nombres complexes suivants sous forme algébrique.

a)  $(2 + 6i)(5 + i)$  .....

e)  $(2 - 3i)^4$  .....

b)  $(3 - i)(4 + i)$  .....

f)  $\frac{1}{3 - i}$  .....

c)  $(4 - 3i)^2$  .....

g)  $\frac{2 - 3i}{5 + 2i}$  .....

d)  $(1 - 2i)(1 + 2i)$  .....

h)  $e^{-i\frac{\pi}{3}}$  .....

### Calcul 15.2 — Forme exponentielle.



Mettre les nombres complexes suivants sous forme exponentielle.

a) 12 .....

e)  $-2e^{i\frac{3\pi}{5}}$  .....

b)  $-8$  .....

f)  $5 - 5i$  .....

c)  $\sqrt{3}i$  .....

g)  $-5 + 5i\sqrt{3}$  .....

d)  $-2i$  .....

h)  $e^{i\frac{\pi}{3}} + e^{i\frac{\pi}{6}}$  .....

## Un calcul plus dur

### Calcul 15.3 — Une simplification.



On pose  $z = \frac{1 + \sqrt{2} + i}{1 + \sqrt{2} - i}$ .

a) Calculer  $|z|$  .....

b) Mettre  $z$  sous forme algébrique .....

c) Calculer  $z^{2021}$  .....

## Trigonométrie et nombres complexes

### Prérequis

Nombres complexes, trigonométrie.

Dans toute cette fiche,  $x$  désigne une quantité réelle.

### Linéarisation

#### Calcul 16.1



Linéariser :

a)  $\cos^3(x)$  .....

d)  $\cos(3x) \sin^3(2x)$  ...

b)  $\cos(2x) \sin^2(x)$  ....

e)  $\cos^3(2x) \cos(3x)$  ..

c)  $\cos^2(2x) \sin^2(x)$  ...

f)  $\sin^2(4x) \sin(3x)$  ...

### Arc moitié, arc moyen

#### Calcul 16.2



Écrire sous forme trigonométrique (c'est-à-dire sous la forme  $re^{i\theta}$ , avec  $r > 0$ ) :

a)  $1 + e^{i\frac{\pi}{6}}$  .....

e)  $-1 - e^{i\frac{\pi}{6}}$  .....

b)  $1 + e^{i\frac{7\pi}{6}}$  .....

f)  $1 - e^{i\frac{\pi}{12}}$  .....

c)  $e^{-i\frac{\pi}{6}} - 1$  .....

g)  $\frac{1 + e^{i\frac{\pi}{6}}}{1 - e^{i\frac{\pi}{12}}}$  .....

d)  $1 + ie^{i\frac{\pi}{3}}$  .....

h)  $(1 + e^{i\frac{\pi}{6}})^{27}$  .....

#### Calcul 16.3



Écrire sous forme trigonométrique (c'est-à-dire sous la forme  $re^{i\theta}$ , avec  $r > 0$ ) :

a)  $e^{i\frac{\pi}{3}} + e^{i\frac{\pi}{2}}$  .....

b)  $e^{i\frac{\pi}{3}} - e^{i\frac{\pi}{2}}$  .....

### Délinéarisation

#### Calcul 16.4



Exprimer en fonction des puissances de  $\cos(x)$  et de  $\sin(x)$  :

a)  $\cos(3x)$  .....

b)  $\sin(4x)$  .....

# Factorisation

## Calcul 16.5



Factoriser :

a)  $\cos(x) + \cos(3x) \dots\dots$

c)  $\cos(x) - \cos(3x) \dots\dots$

b)  $\sin(5x) - \sin(3x) \dots\dots$

d)  $\sin(3x) + \sin(5x) \dots\dots$

## Calcul 16.6



Factoriser :

a)  $\sin(x) + \sin(2x) + \sin(3x) \dots\dots\dots$

b)  $\cos(x) + \cos(3x) + \cos(5x) + \cos(7x) \dots\dots\dots$

c)  $\cos(x) + \cos\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(x + \frac{4\pi}{3}\right) \dots\dots\dots$

## Sommets et produits

## Prérequis

Factorielle. Identités remarquables. Décomposition en éléments simples.  
Fonctions usuelles (racine carrée, logarithme népérien).

Si  $q$  est un nombre réel et si  $(m, n) \in \mathbb{N}^{*2}$  et  $m \leq n$ , on a

$$\begin{aligned} \bullet \sum_{k=m}^n k &= \frac{(n-m+1)(m+n)}{2} & \bullet \sum_{k=1}^n k^3 &= \left( \sum_{k=1}^n k \right)^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} \\ \bullet \sum_{k=1}^n k^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} & \bullet \sum_{k=m}^n q^k &= \begin{cases} q^m \frac{1-q^{n-m+1}}{1-q} & \text{si } q \neq 1 \\ n-m+1 & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned}$$

Dans toute la suite,  $n$  désigne un entier naturel non nul.

## Calculs de sommes simples

## Calcul 17.1



Calculer les sommes suivantes.

a)  $\sum_{k=1}^{n+2} n$  .....

c)  $\sum_{k=1}^n (3k + n - 1)$  .....

b)  $\sum_{k=2}^{n+2} 7k$  .....

d)  $\sum_{k=2}^{n-1} \left( \frac{k-4}{3} \right)$  .....

## Calcul 17.2



Même exercice.

a)  $\sum_{k=1}^n k(k+1)$  .....

d)  $\sum_{k=0}^n 2^k 5^{n-k}$  .....

b)  $\sum_{k=0}^n (4k(k^2 + 2))$  .....

e)  $\sum_{k=1}^n (7^k + 4k - n + 2)$  .....

c)  $\sum_{k=2}^{n-1} 3^k$  .....

f)  $\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \dots + \frac{n}{n^2}$  .....

## Calcul 17.3 — Produits.



Calculer les produits suivants, où  $p$  et  $q$  sont des entiers naturels non nuls tel que  $p \geq q$ .

a)  $\prod_{k=p}^q 2$  .....

c)  $\prod_{k=1}^n 5\sqrt{k} \times k$  .....

b)  $\prod_{k=1}^n 3^k$  .....

d)  $\prod_{k=-10}^{10} k$  .....

## Changements d'indice

### Calcul 17.4



Calculer les sommes suivantes en effectuant le changement d'indice demandé.

- a)  $\sum_{k=1}^n n+1-k$  avec  $j = n+1-k$ . .....
- b)  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \frac{1}{n+1-k}$  avec  $j = n+1-k$ . .....
- c)  $\sum_{k=1}^n k2^k$  avec  $j = k-1$ . .....
- d)  $\sum_{k=3}^{n+2} (k-2)^3$  avec  $j = k-2$ . .....

## Sommes télescopiques, produits télescopiques

### Calcul 17.5 — Sommes télescopiques.



Calculer les sommes suivantes.

- a)  $\sum_{k=2}^{n+2} (k+1)^3 - k^3$  .....
- b)  $\sum_{k=1}^n \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)$  .....
- c)  $\sum_{k=1}^n \frac{k}{(k+1)!}$  .....
- d)  $\sum_{k=1}^n k \times k!$  .....

### Calcul 17.6 — Produits télescopiques.



Calculer les produits suivants.

- a)  $\prod_{k=1}^n \frac{k+1}{k}$  .....
- b)  $\prod_{k=1}^n \frac{2k+1}{2k-1}$  .....
- c)  $\prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k}\right)$  .....
- d)  $\prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$  .....

## Décomposition en éléments simples

### Calcul 17.7



Calculer les sommes suivantes.

- a)  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}$  .....
- b)  $\sum_{k=0}^n \frac{1}{(k+2)(k+3)}$  .....

## Sommation par paquets

### Calcul 17.8



Calculer les sommes suivantes.

a)  $\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k k^2$  .....

b)  $\sum_{k=0}^{2n} \min(k, n)$  .....

## Sommes doubles

### Calcul 17.9



Calculer les sommes doubles suivantes.

a)  $\sum_{1 \leq i, j \leq n} j$  .....

b)  $\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \frac{i}{j}$  .....

c)  $\sum_{1 \leq i < j \leq n} (i + j)$  .....

d)  $\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} (i + j)^2$  .....

e)  $\sum_{1 \leq i, j \leq n} \ln(i^j)$  .....

f)  $\sum_{1 \leq i, j \leq n} \max(i, j)$  .....

## Coefficients binomiaux

## Prérequis

Factorielles. Coefficients binomiaux. Formule du binôme de Newton.

La lettre  $n$  désigne un entier naturel non nul.

## Manipulations de factorielles et coefficients binomiaux

## Calcul 18.1 — Pour s'échauffer.



Donner la valeur des expressions suivantes :

a)  $\frac{101!}{99!}$  .....

d)  $\binom{6}{2}$  .....

b)  $\frac{10!}{7!}$  .....

e)  $\binom{8}{3}$  .....

c)  $\frac{1}{4!} - \frac{1}{5!}$  .....

f)  $4 \times \binom{7}{4}$  .....

## Calcul 18.2 — Pour s'échauffer – bis.



Écrire les expressions suivantes à l'aide de factorielles, coefficients binomiaux et le cas échéant à l'aide de puissances.

a)  $6 \times 7 \times 8 \times 9$  .....

c)  $2 \times 4 \times \dots \times (2n)$  .....

b)  $\frac{6 \times 7 \times 8 \times 9}{2 \times 3 \times 4}$  .....

d)  $3 \times 5 \times \dots \times (2n + 1)$  ...

## Calcul 18.3 — Avec des paramètres.

Simplifier les expressions ci-dessous. La lettre  $k$  désigne un entier naturel tel que  $k < n$ .

a)  $\binom{n}{2}$  (pour  $n \geq 2$ ) .....

d)  $\frac{(n+2)!}{n!}$  .....

b)  $\binom{n}{3}$  (pour  $n \geq 3$ ) .....

e)  $\frac{1}{n!} - \frac{n}{(n+1)!}$  .....

c)  $\frac{\binom{n}{k}}{\binom{n}{k+1}}$  .....

f)  $\frac{(n+1)!}{2^{2(n+1)}} - \frac{n!}{2^{2n}}$  .....

## Calcul 18.4 — Avec des paramètres - bis.

Simplifier les expressions ci-dessous. La lettre  $a$  désigne un nombre non nul.

a)  $\frac{1}{n!} + \frac{1}{2n \times (n+1)!} + \frac{1}{2 \times (n+2)!}$  .....

b)  $\frac{(3(n+1))!}{a^{3(n+1)} \times ((n+1)!)^3} \div \frac{(3n)!}{a^{3n} \times (n!)^3}$  .....

# Autour du binôme de Newton

## Calcul 18.5 — Le binôme de Newton.



Calculer les sommes ci-dessous à l'aide de la formule du binôme de Newton.

- |  |   |
|--|---|
| a) $\sum_{k=0}^n 2^k \binom{n}{k}$ ..... <input style="width: 150px; height: 25px;" type="text"/>        | c) $\sum_{k=0}^n 2^{2n-k} \binom{n}{k}$ ..... <input style="width: 150px; height: 25px;" type="text"/>                  |
| b) $\sum_{k=0}^n (-1)^{k+1} \binom{n}{k}$ ..... <input style="width: 150px; height: 25px;" type="text"/> | d) $\sum_{k=0}^n 2^{k+2} \binom{n}{k} \times 3^{2n-k+1}$ ..... <input style="width: 150px; height: 25px;" type="text"/> |

## Calcul 18.6



- a) Développer à l'aide de la formule du binôme de Newton  $(1 + 1)^n + (1 - 1)^n$  .....
- b) Calculer  $\sum_{p=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2p}$  .....

## Calcul 18.7



En utilisant la fonction  $x \mapsto (1 + x)^n$ , ses dérivées d'ordre 1 et 2 et sa primitive s'annulant en 0, calculer

- |  |  |
|--|--|
| a) $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$ ..... <input style="width: 150px; height: 25px;" type="text"/>          | c) $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \times k^2$ ..... <input style="width: 150px; height: 25px;" type="text"/>           |
| b) $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \times k$ ..... <input style="width: 150px; height: 25px;" type="text"/> | d) $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \times \frac{1}{k+1}$ ..... <input style="width: 150px; height: 25px;" type="text"/> |

## Calcul 18.8



- a) Donner le coefficient de  $x^n$  dans le développement de  $(1 + x)^{2n}$  .....
- b) Donner-en une autre expression en développant le produit  $(1 + x)^n(1 + x)^n$  .....
- c) Calculer  $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2$  .....

## Manipulation des fonctions usuelles

### Prérequis

Dérivation, équations du second degré.

### Calculs de valeurs

#### Calcul 19.1 — Valeurs remarquables de arctan.



Calculer les valeurs suivantes.

a)  $\arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$  .....

b)  $\arctan(1)$  .....

### Résolution d'équations

#### Calcul 19.2 — Fonctions $x \mapsto a^x$ .



Résoudre les équations suivantes, d'inconnue  $x \in \mathbb{R}$ .

a)  $3^x = \frac{9^x}{2}$  .....

c)  $2^x = 3 \times 4^x$  .....

b)  $4^x = 2 \times 2^x$  .....

d)  $10^{2x} = 4 \times 5^x \times 9^{\frac{x}{2}}$  ...

#### Calcul 19.3 — Fonctions $x \mapsto a^x$ : plus difficile..



Résoudre les équations suivantes, d'inconnue  $x \in \mathbb{R}$ .

On pourra faire intervenir une équation de degré 2 en posant une nouvelle variable.

a)  $2^x + 4^x = 4$  .....

b)  $16^x - 3 \times 4^x + 2 = 0$  .....

c)  $2 \times 9^x - 3^x - 3 = 0$  .....

d)  $3^x + 3^{2x} - 1 = 0$  .....

### Dérivation

#### Calcul 19.4 — Quelques calculs de dérivées.



Dériver les fonctions suivantes.

a)  $x \mapsto 2^x + x^2$  .....

c)  $x \mapsto x^x$  .....

b)  $x \mapsto \frac{3^x}{5^x + 1}$  .....

## Suites numériques

## Prérequis

Suites récurrentes. Suites arithmétiques. Suites géométriques.

## Calcul de termes

## Calcul 20.1 — Suite explicite.

Soit la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par :  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{2n+3}{5} \times 2^{n+2}$ . Calculer :

- a)  $u_0$  .....       c)  $u_{n+1}$  .....
- b)  $u_1$  .....       d)  $u_{3n}$  .....

## Calcul 20.2 — Suite récurrente.

On définit la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  par  $u_0 = 1$  et  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 2u_n + 3$ . Calculer :

- a) son troisième terme .....       b)  $u_3$  .....

## Calcul 20.3 — Suite récurrente.

On définit la suite  $(v_n)_{n \geq 1}$  par  $v_1 = \sqrt{2}$  et  $\forall n \geq 1, v_{n+1} = \sqrt{v_n}$ . Calculer :

- a)  $v_3$  .....       b) son sixième terme .....

## Calcul 20.4 — Suite récurrente.

On définit la suite  $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$  par  $w_0 = 2$  et  $\forall n \in \mathbb{N}, w_{n+1} = \frac{1}{2}w_n^2$ . Calculer :

- a)  $w_2$  .....       b) son centième terme .....

## Calcul 20.5 — Suite explicite.

Soit la suite  $(t_n)_{n \geq 1}$  définie par  $\forall n \in \mathbb{N}, t_n = \ln\left(\frac{n^n}{2^n}\right)$ . Calculer, pour  $n \in \mathbb{N}^*$  :

- a)  $t_{2n}$  .....       b)  $t_{4n}$  .....

## Suites arithmétiques et géométriques

## Calcul 20.6 — Suite arithmétique.

La suite  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est la suite arithmétique de premier terme 1 et de raison 2. Calculer :

- a)  $a_{10}$  .....       c)  $a_{1\ 000}$  .....
- b)  $s_{100} = a_0 + a_1 + \dots + a_{99}$  .....       d)  $s_{101} = a_0 + a_1 + \dots + a_{100}$  .....

**Calcul 20.7 — Suite arithmétique.**



La suite  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite arithmétique de raison  $r$  vérifiant que  $b_{101} = \frac{2}{3}$  et  $b_{103} = \frac{3}{4}$ . Calculer :

- a)  $b_{102}$  .....       b)  $r$  .....

**Calcul 20.8 — Suite géométrique.**



La suite  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est la suite géométrique de premier terme  $g_0 = 3$  et de raison  $\frac{1}{2}$ . Calculer :

- a) Son dixième terme est : .....       c)  $g_{10}$  .....   
 b)  $\sigma_{10} = g_0 + g_1 + \dots + g_9$  .....       d)  $\sigma_{11} = g_0 + g_1 + \dots + g_{10}$  .....

**Calcul 20.9 — Suite géométrique.**



La suite  $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite géométrique de raison  $q$  vérifiant que  $h_{11} = \frac{5\pi}{11}$  et  $h_{13} = \frac{11\pi}{25}$ . Calculer :

- a)  $h_{12}$  .....       b)  $q$  .....

## Suites récurrentes sur deux rangs

**Calcul 20.10**



Soit la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par que  $u_0 = 2, u_1 = 1$  et  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1} + 6u_n$ . Calculer :

- a)  $u_n$  .....       b)  $u_5$  .....

**Calcul 20.11**



Soit la suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par que  $v_0 = 0, v_1 = \sqrt{2}$  et  $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+2} = 2v_{n+1} + v_n$ . Calculer :

- a)  $v_n$  .....       b)  $v_2$  .....

**Calcul 20.12 — Suite de Fermat.**



Soit la suite  $(F_n)_{n \geq 0}$  définie par  $\forall n \in \mathbb{N}, F_n = 2^{2^n} + 1$ . Calculer :

- a)  $F_3$  .....       d)  $F_n \times (F_n - 2)$  .....   
 b)  $F_4$  .....       e)  $F_n^2$  .....   
 c)  $(F_{n-1} - 1)^2 + 1$  .....       f)  $F_{n+1}^2 - 2(F_n - 1)^2$  .....

## Développements limités

### Prérequis

Il est nécessaire de connaître les développements (en 0) des fonctions usuelles, ainsi que la formule de Taylor-Young !

**Avertissement :** Les développements limités peuvent se donner au « sens faible » (avec les petits  $o(\cdot)$ ) ou « au sens fort » (avec les grands  $O(\cdot)$ ). Volontairement, aucune de ces deux formes n'est imposée. Mais, pour des raisons de concision, une seule d'entre elles est donnée dans les éléments de correction de chaque question.

## Développements limités

### Calcul 21.1 — Développements limités d'une somme ou d'un produit de fonctions.



Former le développement limité, à l'ordre indiqué et au voisinage de 0, de la fonction de la variable réelle  $x$  définie par l'expression suivante :

a) À l'ordre 4 :  $f(x) = \sin(x) + 2 \ln(1+x)$  .....

b) À l'ordre 4 :  $\frac{\ln(1+x)}{1+x}$  .....

c) À l'ordre 6 :  $e^x \sin(x)$  .....

### Calcul 21.2 — Développements limités d'une fonction composée.



Former le développement limité, à l'ordre et au voisinage indiqués, de la fonction de la variable réelle  $x$  définie par l'expression suivante :

a) À l'ordre 4, en 0 :  $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$  .....

b) À l'ordre 6, en 0 :  $\sqrt{\cos(x)}$  .....

c) À l'ordre 2, en 1 :  $\frac{\ln(2-x)}{x^2}$  .....

### Calcul 21.3 — Développements limités d'une fonction composée.



Former le développement limité, à l'ordre et au voisinage indiqués, de la fonction de la variable réelle  $x$  définie par l'expression suivante :

a) À l'ordre 2, en  $\frac{\pi}{3}$  :  $\sin(\pi \cos(x))$  .....

b) À l'ordre 3, en  $\frac{\pi}{4}$  :  $\tan(x)$  .....

c) À l'ordre 7, en  $\frac{\pi}{2}$  :  $\cos(\pi \sin(x))$  .....

# Développements asymptotiques

## Calcul 21.4



Former le développement asymptotique, à la précision et au voisinage indiqués, de la fonction de la variable réelle  $x$  définie par l'expression suivante :

a) À la précision  $x^2$ , en  $0$  :  $\frac{1}{x(e^x - 1)} - \frac{1}{x^2}$  .....

b) À la précision  $\frac{1}{x^5}$ , en  $+\infty$  :  $\frac{\sin(1/x)}{x+1}$  .....

c) À la précision  $\frac{1}{x^3}$ , en  $+\infty$  :  $x \ln(x+1) - (x+1) \ln(x)$  .....

d) À la précision  $\frac{e^x}{x^2}$ ,  $+\infty$  :  $\left(\frac{1}{x} + 1\right)^{x^2}$  .....

## Calcul matriciel

### Prérequis

Calculs algébriques (sommés), coefficients binomiaux.

## Calcul matriciel

### Calcul 22.1 — Calculs de produits matriciels.



Dans cet exercice, on note  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ ,  $E$  les cinq matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = (1 \quad 7 \quad -2),$$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Calculer les produits matriciels suivants.

a)  $A^2 \dots$

d)  $E \times B$

g)  $D^2 \dots$

b)  $A^3 \dots$

e)  $A \times E$

h)  $D \times C$

c)  $B \times E$

f)  $B \times A$

i)  $B^T \times B$

**Calcul 22.2 — Calcul de puissances.**



On note

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & (1) & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix},$$

la matrice  $D$  étant de taille  $n \times n$  (où  $n \in \mathbb{N}^*$ ), et où  $\theta \in \mathbb{R}$ .

Calculer le carré, le cube de chacune de ces matrices et utiliser ces calculs pour conjecturer leur puissance  $k$ -ième, pour  $k \in \mathbb{N}$ .

a) $A^2 \dots$	e) $B^3 \dots$	i) $C^k \dots$
b) $A^3 \dots$	f) $B^k \dots$	j) $D^2 \dots$
c) $A^k \dots$	g) $C^2 \dots$	k) $D^3 \dots$
d) $B^2 \dots$	h) $C^3 \dots$	l) $D^k \dots$

**Calcul 22.3 — Calculs avec des sommes.**



Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On note  $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ ,  $B = (b_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$  et  $C = (c_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$  les matrices de termes généraux suivants :

$$a_{ij} = \binom{i-1}{j-1}, \quad b_{ij} = 2^i 3^{j-i}, \quad c_{ij} = \delta_{i,j+1} + \delta_{i,j-1}.$$

Donner le coefficient d'indice  $(i, j)$  des matrices suivantes. On simplifiera au maximum le résultat obtenu et, notamment, on trouvera une expression sans le symbole  $\sum$ .

a) $A \times B \dots\dots\dots$	c) $B^\top \times B \dots\dots\dots$
b) $B^2 \dots\dots\dots$	d) $A \times C \dots\dots\dots$

**Calcul 22.4 — Deux calculs plus difficiles !.**



Soient  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ .

En utilisant les matrices de l'exercice précédent, calculer les termes généraux suivants.

a)  $[A^2]_{i,j}$  .....       b)  $[C^2]_{i,j}$  .....

## Inversion de matrices

**Calcul 22.5 — Détermination d'inversibilité, calcul d'inverses.**



Dans cet exercice, on note les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} \pi & e \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1+i & 2-i \\ i & -i \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} \pi & \pi & 2\pi \\ \pi & 0 & 0 \\ -\pi & -2\pi & 0 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 4 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix},$$

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 & 4 \\ 7 & 2 & 2 & 9 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Déterminer, si elle existe, l'inverse de chacune des matrices. Si elle n'est pas inversible, indiquer dans la case « non inversible » .

a) $A$ ...	d) $D$ ...	g) $G$ ...
b) $B$ ...	e) $E$ ...	h) $H$ ..
c) $C$ ...	f) $F$ ...	i) $J$ ...

**Calcul 22.6 — Matrices dépendant d'un paramètre.**



On note  $\lambda$  et  $\mu$  deux paramètres réels. On note  $A$  et  $B$  les deux matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \\ \lambda & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \lambda & 1 & \lambda - 1 \\ 1 & \lambda & 1 \end{pmatrix}$$

Pour chaque matrice, donner une condition nécessaire et suffisante (abrégée ci-dessous en CNS) sur  $\lambda$  pour que la matrice soit inversible et en donner, dans ce cas, l'inverse.

a) CNS pour  $A$   
inversible ...

c) CNS pour  $B$   
inversible ...

b) Inverse de  $A$  ...

d) Inverse de  $B$  ...

# Algèbre linéaire

## Prérequis

Coordonnées, Applications linéaires, Matrices, Rang.

## Vecteurs

### Calcul 23.1



Pour chacun des calculs suivants, déterminer les coordonnées du vecteur  $u$  dans la base  $\mathcal{B}$ .

a)  $u = (1, 1)$ ,  $\mathcal{B} = ((0, 1), (-1, 2))$ . .....

b)  $u = (1, 1)$ ,  $\mathcal{B} = ((-1, 2), (0, 1))$ . .....

c)  $u = (3, 4)$ ,  $\mathcal{B} = ((1, 2), (12, 13))$ . .....

d)  $u = (1, 2, 1)$ ,  $\mathcal{B} = ((0, 1, 3), (4, 5, 6), (-1, 0, 1))$ . .....

e)  $u = (-1, 0, 1)$ ,  $\mathcal{B} = ((1, 0, 1), (1, 1, 1), (-1, -1, 3))$ . .....

f)  $u = X^3 + X^2$ ,  $\mathcal{B} = (1, X, X(X-1), X(X-1)(X-2))$  .....

g)  $u : x \mapsto \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ ,  $\mathcal{B} = (x \mapsto \cos(x), x \mapsto \sin(x))$  .....

## Calculs de rangs

### Calcul 23.2 — Sans calcul.



Déterminer le rang des matrices suivantes :

a)  $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$  .....

d)  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 9 \\ 6 & 7 & 13 \end{pmatrix}$  .....

b)  $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 4 \\ 2 & 8 & 2 & 8 \\ 2 & 8 & 2 & 8 \\ 5 & 20 & 5 & 20 \end{pmatrix}$  .....

e)  $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$  .....

c)  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \end{pmatrix}$  .....

f)  $\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  .....

**Calcul 23.3**



Déterminer le rang des matrices suivantes :

a)  $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -4 & -3 & -1 \\ -4 & -2 & -2 \end{pmatrix}$  .....

c)  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$  .....

b)  $\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$  .....

d)  $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$  .....

## Matrices et Applications linéaires

**Calcul 23.4 — Matrices d'endomorphismes.**



Pour les applications linéaires  $f$  et les bases  $\mathcal{B}$  suivantes, déterminer la matrice de  $f$  dans la base  $\mathcal{B}$ .

a)  $f : (x, y) \mapsto (x + y, 3x - 5y), \mathcal{B} = ((1, 0), (0, 1)).$  .....

b)  $f : (x, y) \mapsto (x + y, 3x - 5y), \mathcal{B} = ((0, 1), (1, 0)).$  .....

c)  $f : (x, y) \mapsto (2x + y, x - y), \mathcal{B} = ((1, 2), (3, 4)).$  .....

d)  $f : (x, y, z) \mapsto (x + y, 3x - z, y), \mathcal{B} = ((1, 0, 0), (0, 1, 0), (1, 1, 1)).$  .....

e)  $f : P \mapsto P(X + 2), \mathcal{B} = (1, X, X^2).$  .....

**Calcul 23.5 — Matrices d'applications linéaires.**



Pour les applications linéaires  $f$  et les bases  $\mathcal{B}$ ,  $\mathcal{B}'$  suivantes, déterminer la matrice de  $f$  de la base  $\mathcal{B}$  dans la base  $\mathcal{B}'$ .

a)  $f : (x, y, z) \mapsto (x + y + z, x - y)$ ,  $\mathcal{B} = ((0, 1, 3), (4, 5, 6), (-1, 0, 1))$ ,  $\mathcal{B}' = ((0, 1), (1, 0))$ .

b)  $f : P \mapsto P'$ ,  $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$ ,  $\mathcal{B}' = (1, X, X^2, X^3)$ . .....

# Équations différentielles

## Prérequis

Équations différentielles.

## Équations d'ordre 1 à coefficients constants

### Calcul 24.1



Déterminer les solutions des problèmes de Cauchy suivants :

a)  $y' = 12y$  et  $y(0) = 56$  .....

b)  $y' = y + 1$  et  $y(0) = 5$  .....

c)  $y' = 3y + 5$  et  $y(0) = 1$  .....

d)  $y' = 2y + 12$  et  $y(0) = 3$  .....

### Calcul 24.2



Déterminer les solutions des problèmes de Cauchy suivants :

a)  $5y' = -y$  et  $y(1) = e$  .....

b)  $7y' + 2y = 2$  et  $y(7) = -1$  .....

c)  $y' - \sqrt{5}y = 6$  et  $y(0) = \pi$  .....

d)  $y' = \pi y + 2e$  et  $y(\pi) = 12$  .....

## Équations d'ordre 2, homogènes, à coefficients constants

### Calcul 24.3 — Une équation avec conditions initiales.



Déterminer les solutions des problèmes de Cauchy suivants :

a)  $y'' - 3y' + 2y = 0$  et  $y(0) = 1$  et  $y'(0) = 2$  .....

b)  $y'' - 3y' + 2y = 0$  et  $y(0) = 1$  et  $y'(0) = 1$  .....

c)  $y'' - 3y' + 2y = 0$  et  $y(0) = 1$  et  $y'(0) = 3$  .....

d)  $y'' - 3y' + 2y = 0$  et  $y(0) = 1$  et  $y'(0) = 3i$  .....

### Calcul 24.4 — Racines doubles, Racines simples.



Déterminer les solutions des problèmes de Cauchy suivants :

a)  $y'' - y = 0$  et  $y(0) = 1$  et  $y'(0) = 1$  .....

b)  $y'' + 3y' + 2y = 0$  et  $y(0) = 2$  et  $y'(0) = 3$  .....

c)  $y'' + y' - 2y = 0$  et  $y(0) = 1$  et  $y'(0) = 2$  .....

d)  $y'' - 2y' + y = 0$  et  $y(0) = 2$  et  $y'(0) = 1$  .....

e)  $y'' + 4y' + 4y = 0$  et  $y(1) = 1$  et  $y'(1) = -3$  .....

### Calcul 24.5 — Racines complexes.



Déterminer les solutions des problèmes de Cauchy suivants :

a)  $y'' + y = 0$  et  $y(0) = 1$  et  $y'(0) = 2$  .....

b)  $y'' + y' + y = 0$  et  $y(0) = 1$  et  $y'(0) = -1$  .....

c)  $y'' + 2y' + 2y = 0$  et  $y(0) = 0$  et  $y'(0) = 1$  .....

d)  $y'' - 2y' + 5y = 0$  et  $y(0) = i$  et  $y'(0) = -i$  .....

## Fonctions de deux variables

**Prérequis**

Fonctions d'une variable réelle (limites, continuité, dérivabilité)

### Les fondamentaux

**Calcul 25.1 — Ensembles de définition.**



Déterminer le plus grand ensemble de définition possible de chacune des fonctions suivantes.

- a)  $(x, y) \mapsto \ln(x) + \sqrt{y}$  .....
- b)  $(x, y) \mapsto \frac{x\sqrt{y}}{x^2 + y^2}$  .....
- c)  $(x, y) \mapsto \sqrt{16 - x^2 - y^2} \ln(x^2 + y^2 - 16)$  .....

**Calcul 25.2 — Dérivation partielle.**



Calculer les dérivées partielles des fonctions suivantes.

- a)  $f : (x, y) \mapsto x^2 + y^5 + xy + \pi$  .....
- b)  $f : (x, y) \mapsto \sin(2xy - y)$  .....
- c)  $f : (x, y) \mapsto (x^2y, x^2 - y^2)$  .....
- d)  $f : (x, y) \mapsto \arctan(2x + y)$  .....

**Calcul 25.3**



Même exercice.

- a)  $f : (x, y) \mapsto \cos(x - y)$  .....
- b)  $f : (x, y) \mapsto x \cos(e^{xy})$  .....
- c)  $f : (x, y) \mapsto x^y$  .....
- d)  $f : (x, y) \mapsto \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$  .....

# Composition de fonctions

## Calcul 25.4 — Règle de la chaîne.



On note  $w(t) = f(u(t), v(t))$ . Calculer  $w'(t)$  pour chacune des fonctions  $f, u, v$  définies ci-dessous.

a)  $f(x, y) = 4x^2 + 3y^2$  avec  $\begin{cases} u = \sin \\ v = \cos \end{cases}$  .....

b)  $f(x, y) = \sqrt{x^2 - y^2}$  avec  $\begin{cases} u(t) = e^{2t} \\ v(t) = e^{-t} \end{cases}$  .....

c)  $f(x, y) = x^2 - 3xy + 2y^2$  avec  $\begin{cases} u(t) = 3 \sin(2t) \\ v(t) = 4 \cos(2t) \end{cases}$  .....

## Calcul 25.5 — Changements de variables.



Soient  $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$  et  $c \in \mathbb{R}^*$ .

Exprimer les dérivées partielles de  $f \circ \varphi$  selon celles de  $f$  pour les fonctions suivantes.

a)  $\varphi : (u, v) \mapsto \left( \frac{u+v}{2}, \frac{v-u}{2c} \right)$  .....

b)  $\varphi : (r, \theta) \mapsto (r \cos \theta, r \sin \theta)$  .....