Exercice 14.

1. (a) f est continue sur $]-\infty,2]$ comme composition de fonctions continues.

$$\begin{cases} \text{La fonction } x \mapsto 2-x \text{ est dérivable sur }]-\infty,2[. \\ \text{La fonction racine carrée est dérivable sur } \mathbb{R}_+^*. \\ \forall x \in]-\infty,2[,\ 2-x \in \mathbb{R}_+^*. \end{cases}$$

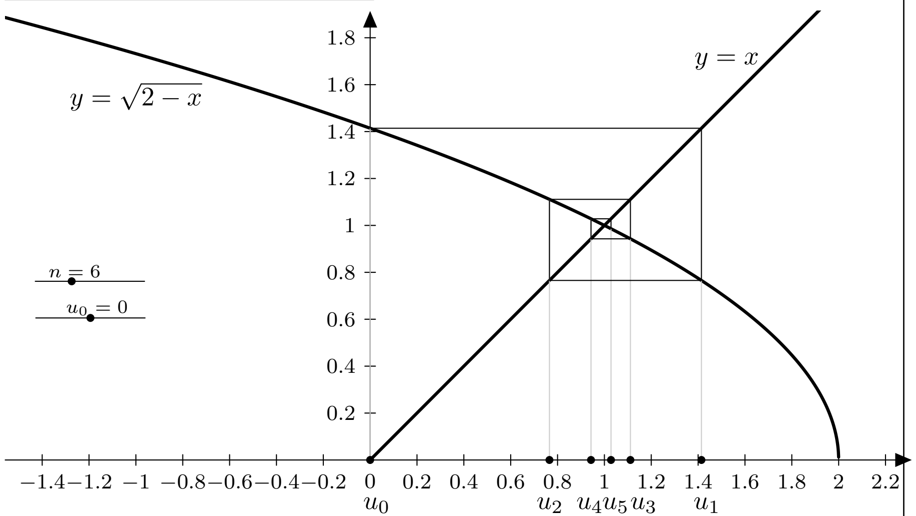
Par composition, f est dérivable sur $]-\infty,2[$.
Pour $x \in]-\infty,2[$, $f'(x) = \frac{-1}{2\sqrt{2-x}} < 0$.

$\boxed{f \text{ est strictement décroissante sur }]-\infty,2].}$

On aboutit à la même conclusion en observant que f est la composition de deux fonctions de sens de variation opposés.

(b) $f(x) = x \iff \sqrt{2-x} = x$
$f(x) = x \iff 2-x = x^2$ et x et $\sqrt{2-x}$ont le même signe
$f(x) = x \iff x^2+x-2 = 0$ et $x \geqslant 0$
Les points fixes de f sont les éventuelles racines positives du polynôme x^2+x-2.
$\Delta = 1^2+4\times 2 = 9 = 3^2$. Les racines sont $x_1 = \frac{-1-3}{2} = -2$ et $x_2 = \frac{-1+3}{2} = 1$.

$\boxed{\text{L'unique point fixe de } f \text{ est } 1.}$



2. (a) D'aprés la représentation précédente,

$\boxed{\text{on conjecture que } (u_{2n}) \text{ est croissante et } (u_{2n+1}) \text{ décroissante.}}$

(b) On considère la propriété $\mathscr{P}(n)$: "u_n est défini et $u_n \in [0,2]$".
Démontrons par récurrence que pour tout entier naturel n, $\mathscr{P}(n)$ est vraie.

Initialisation. La propriété est vraie au rang 0 car $u_0 = 0 \in [0,2]$.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $\mathscr{P}(n)$ (HR).
On a : $0 \leqslant u_n \leqslant 2$. En particulier u_n est dans le domaine de définition de f donc u_{n+1} est bien défini.
Par décroissance de f sur $]-\infty,2]$, on obtient : $\sqrt{2} = f(0) \geqslant f(u_n) \geqslant f(2) = 0$ et en particulier $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant 2$ car $\sqrt{2} \leqslant 2$. D'où $\mathscr{P}(n+1)$.

Conclusion. La propriété est vraie au rang 0 et héréditaire à partir du rang 0 donc elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ est bien définie et } \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in [0,2].}$

3. f est décroissante sur $]-\infty,2[$ donc $f([0,2]) = [f(2),f(0)] = [0,\sqrt{2}] \subset]-\infty,2]$, ce qui montre que pour tout $x \in [0,2]$, $f(x) \in]-\infty,2]$ donc $h(x) = f\big(f(x)\big)$ est bien défini. $\boxed{h \text{ est bien définie sur } [0,2].}$

$\boxed{\text{La fonction } h \text{ est croissante sur } [0,2] \text{ comme composition de fonctions de même sens de variation.}}$

On aurait aussi pu dériver $h : x \longmapsto \sqrt{2-\sqrt{2-x}}$.

4. (a) $h(u_{2n}) = f\big(f(u_{2n})\big) = f(u_{2n+1}) = u_{2n+2}$ donc $\boxed{u_{2(n+1)} = h(u_{2n})}$.

$h(u_{2n+1}) = f\big(f(u_{2n+1})\big) = f(u_{2n+2}) = u_{2n+3}$ donc $\boxed{u_{2(n+1)+1} = h(u_{2n+1})}$.

(b) $u_0 = 0$, $u_1 = \sqrt{2-0} = \sqrt{2}$ et $u_2 = \sqrt{2-\sqrt{2}}$.
On $u_0 = 0 \leqslant \sqrt{2-\sqrt{2}} = u_2$.
Démontrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{2n} \leqslant u_{2(n+1)}$.

Initialisation. La propriété vient d'être démontrée au rang 0.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $u_{2n} \leqslant u_{2(n+1)}$ (HR).
D'après les questions 2.(b) et 3, tous les termes de la suite u sont dans $[0,2]$ et h est croissante sur $[0,2]$ donc $h(u_{2n}) \leqslant h(u_{2(n+1)})$.
D'après la question précédente, on obtient $u_{2(n+1)} \leqslant u_{2(n+2)}$ qui correspond à la propriété au rang $n+1$.

Conclusion. D'après le principe de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{2n} \leqslant u_{2(n+1)}$, autrement dit, $\boxed{(u_{2n}) \text{ est croissante.}}$

Soit $n \in \mathbb{N}$. On sait que $u_{2n} \leqslant u_{2(n+1)}$. En composant par la fonction f qui est décroissante sur $[0,2]$, on obtient : $u_{2n+1} = f(u_{2n}) \geqslant f(u_{2(n+1)}) = u_{2(n+1)+1}$.

Autrement dit, $\boxed{(u_{2n+1}) \text{ est décroissante.}}$

Les deux suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones et bornées par 0 et 2 donc $\boxed{(u_{2n}) \text{ et } (u_{2n+1}) \text{ convergent.}}$

(c) $h(x) = x \iff 2 - \sqrt{2-x} = x^2$ et $x \geqslant 0$

$$\begin{aligned} h(x) = x &\iff 2 - x^2 = \sqrt{2-x} \text{ et } x \geqslant 0 \\ &\iff (2-x^2)^2 = 2 - x \text{ et } x \geqslant 0 \text{ et } 2 - x^2 \geqslant 0 \\ &\iff 4 - 4x^2 + x^4 = 2 - x \text{ et } x \geqslant 0 \text{ et } 2 - x^2 \geqslant 0 \\ &\iff x^4 - 4x^2 + x + 2 = 0 \text{ et } x \geqslant 0 \text{ et } 2 - x^2 \geqslant 0 \end{aligned}$$

(d) On vérifie sans peine que 1 et -2 sont des racines du polynôme $x^4 - 4x^2 + x + 2$ donc il existe a, b et c tels que $x^4 - 4x^2 + x + 2 = (x-1)(x+2)(ax^2 + bx + c) = (x^2 + x - 2)(ax^2 + bx + c)$.

Par identification, on trouve $a = 1$ et $c = -1$ puis $b = -1$ d'où $x^4 - 4x^2 + x + 2 = (x-1)(x+2)(x^2 - x - 1)$.

Les racines du polynôme $x^2 - x - 1$ sont $\frac{1-\sqrt{5}}{2} < 0$ et $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

$2 - \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 = 2 - \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} + 1\right) = \frac{1-\sqrt{5}}{2} < 0.$

D'après la question précédente, $\boxed{\text{le seul point fixe de } h \text{ est } 1.}$

(e) On note ℓ_1 et ℓ_2 les limites respectives des suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}).

La fonction h est continue sur $[0,2]$. et les limites de (u_{2n}) et (u_{2n+1}) appartiennent à cet intervalle.

Par passage à la limite dans les égalités $u_{2(n+1)} = h(u_{2n})$ et $u_{2(n+1)+1} = h(u_{2n+1})$, on trouve $\ell_1 = h(\ell_1)$ et $\ell_2 = h(\ell_2)$.

D'après la question précédente, $\ell_1 = \ell_2 = 1$ donc $\boxed{(u_n) \text{ converge vers } 1.}$

5. D'après la représentation de la question 2.(a), on se convainc sans peine que

$\boxed{\begin{array}{l} (u_n) \text{ est bien définie si et seulement si } u_0 \in [-2,2]. \\ \text{Dans ce cas, } (u_n) \text{ converge toujours vers } 1. \end{array}}$