
TD n° 19 :
Exercices sur la Dérivation

Exercice 1 Etudier la dérivabilité des fonctions suivantes et calculer leur dérivée :

1. $f(x) = e^x \ln(\sin(x))$
2. $f(x) = x^{\tan(x)}$
3. $f(x) = \begin{cases} \frac{\cos(x)}{\sqrt{\pi - 2x}} & \text{si } x \neq \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{si } x = \frac{\pi}{2} \end{cases}$

Exercice 2 Etudier les fonctions suivantes :

1. $f(x) = \frac{x}{\ln(1+x)}$
2. $f(x) = x e^{\frac{x-1}{x+1}}$

Exercice 3 Soit $x \in \mathbb{R}^*$; simplifier :

$$\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$$

Exercice 4 Soit f une fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[a, +\infty[$, où a est un réel.

On suppose que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x)$ existent et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ est finie.

Montrer, en utilisant l'égalité des accroissements finis, que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$.

La réciproque est-elle vraie ? (Trouver un contre-exemple).

Exercice 5 Soient f et g deux fonctions dérivables sur l'intervalle $]a, b[$, continues sur $[a, b]$ et telles que :

$$\forall x \in]a, b[, |f'(x)| \leq g'(x)$$

Montrer que : $|f(b) - f(a)| \leq |g(b) - g(a)|$

Exercice 6 Calculer les dérivées n -ièmes de la fonction suivantes : $f(x) = \frac{1}{x(x+1)}$

(Remarquer que $\frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{(x+1)}$)

Exercice 7 Soit f la fonction définie par $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

1. Montrer que f est continue sur \mathbb{R} et de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R}^* .
2. Etablir :

$$\forall x \neq 0, \forall k \in \mathbb{N}, f^{(k)}(x) = \frac{P_k(x)}{x^{3k}} f(x)$$

où P_k est un polynôme.

3. En déduire que f est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} et déterminer $f^{(k)}(0)$, pour tout entier k .