Lycée Fénelon **BCPST1**
Année 2021-22

TD n^{o} 20 : Exercices sur les variables aléatoires

Exercice 1

Dans chacune des expériences suivantes, reconnaître la loi suivie par la V.A.R. X et de préciser ses paramètres ainsi que son univers-image $X(\Omega)$.

1. On range au hasard 20 objets dans 3 tiroirs. Soit X le nombre d'objets dans le premier tiroirs.
2. Un enclos contient 15 lamas, 15 dromadaires et 15 chameaux. On sort un animal au hasard de cet enclos. Soit X le nombre de bosses de cet animal.
3. On choisit au hasard un nombre n entre 0 et 100 ; soit X le reste de n dans la division euclidienne par 2.
4. On prend un jeu de 32 cartes mélangées. On retourne une par une les cartes jusqu'à l'apparition de l'as de coeur. Soit X le nombre de cartes que l'on a retournées.
5. On suppose que la probabilité de naissance d'une fille et d'un garçon sont identiques. Soit X le nombre de garçons dans une famille de 3 enfants.

Exercice 2

Une urne contient 10 boules blanches et 5 boules noires. On tire successivement avec remise 3 boules dans l'urne. Soit X la le nombre de boules blanches obtenues.
a) Déterminer la loi de X et la représenter graphiquement.
b) calculer l'espérance $E(X)$ et la variance $V(X)$.
c) Donner la fonction de répartition de X et la représenter graphiquement.

Exercice 3

On lance deux dés non pipés et on note X la somme obtenue. Déterminer la loi de X et la représenter graphiquement.

Exercice 4

On souhaite constituer un jury de 3 membres parmis 4 hommes et 5 femmes postulants. Chacun étant compétant, le choix se fera au hasard. Soit X la variable aléatoire désignant le nombre d'hommes faisant partie du jury. Déterminer la loi de X.

Exercice 5 Une urne contient 2 boules blanches et 4 boules noires. On tire les boules une à une sans les remettre jusqu'à ce qu'il ne reste que des boules d'une seule couleur dans l'urne.
Soit X le nombre de tirages nécessaires. Quelle est la loi de X ?

Exercice 6

Un garagiste dispose de deux voitures de location. Il loue les voitures avec une marge brute de 50 euros par jour et par voiture. On note X la V.A.R. égale au nombre de clients se présentant chaque jour pour louer une voiture. On suppose que $X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3\}$ avec : $\mathbb{P}(X = 0) = 0,1$, $\mathbb{P}(X = 1) = 0,3$, $\mathbb{P}(X = 2) = 0,4$ et $\mathbb{P}(X = 3) = 0,2$.

1. Déterminer la loi de la V.A.R. Y : "nombre de clients satisfaits par jour" (un client étant "satisfait" lorsqu'il a pu obtenir un véhicule de location).
2. Calculer la marge brute moyenne par jour.
3. Mêmes questions lorsque chaque jour, chaque voiture est envoyée à l'atelier pour révision avec probabilité $1/5$, indépendamment l'une de l'autre ou de l'affluence des clients : on pourra considérer que le nombre de voitures disponibles chaque jour suit une loi usuelle que l'on déterminera.

Exercice 7 Les vaches laitières sont atteintes par une maladie non contagieuse M avec la probabilité $p = 0,15$. Pour dépister la maladie M dans une étable de n vaches laitières, on fait une analyse de lait. On peut procéder de deux manières différentes : *1ère méthode :* On effectue une analyse sur un échantillon de lait de chaque vache. *2ème méthode :* On effectue un analyse sur un échantillon du mélange des laits des n vaches et si le résultat est positif, on effectue une analyse pour chaque vache.

Soit X_n le nombre d'analyses réalisées dans la deuxième méthode. On pose $Y_n = \dfrac{X_n}{n}$.

1. Déterminer la loi de Y_n, puis l'espérance mathématique de cette variable, en fonction de n.
2. On voudrait connaître la méthode la plus économique pour le fermier, en fonction du nombre n d'animaux.
   (a) Etudier la fonction $f : x \to ax + \ln x$ où a est un réel strictement négatif. Montrer que dans le cas où $a = \ln 0.85$, f admet un maximum positif.
   (b) Trouver dans ce cas la plus grande valeur entière n_0 pour laquelle $f(n_0) > 0$.
   (c) Montrer que $f(n) > 0$ équivaut à $E(Y_n) < 1$ et en déduire suivant les valeurs de n la méthode que l'on a intérêt à adopter.

Exercice 8 Une urne contient initialement une boule blanche et une boule rouge. On effectue des tirages successifs d'une boule dans l'urne selon le protocole suivant : après chaque tirage, la boule tirée est remise dans l'urne et on rajoute dans l'urne, avant le tirage suivant, une boule de la couleur de la boule qui vient d'être tirée.

Pour tout entier naturel non nul n, on note X_n la V.A.R. égale au nombre de boules blanches obtenues au cours des n premiers tirages.

1. Déterminer la loi de X_1.
2. Déterminer la loi de X_2.
3. Déterminer la loi de X_n.

Exercice 9

On considère n urnes numérotées de 1 à n. La première urne contient des boules blanches et des boules noires ; la proportion des boules blanches est p_1. Les urnes suivantes contiennent chacune a boules blanches et a boules noires.

On effectue n tirages de la manière suivante : on tire une boule de la première urne que l'on place dans la deuxième urne, puis on tire une boule de la deuxième urne que l'on place dans la troisième urne, et ainsi de suite jusqu'au tirage dans la dernière urne.

Pour $1 \leq k \leq n$, on désigne par X_k la variable aléatoire égale à 1 si la boule tirée de la $k^{\text{ième}}$ urne est blanche et égale à 0 si la boule tirée de la $k^{\text{ième}}$ urne est noire.

1. Déterminer les lois de probabilité de X_1 et X_2, puis leurs espérances mathématiques et leur variances en fonction de p_1 et de a.
2. Démontrer qu'il existe une valeur de p_1 pour laquelle X_1 et X_2 suivent la même loi de probabilité.
3. Pour cette valeur de p_1, étudier l'indépendance de X_1 et X_2.

   Pour $1 \leq k \leq n$, on pose $p_k = \mathbb{P}(X_k = 1)$ et $q_k = \mathbb{P}(X_k = 0)$.
4. Démontrer qu'il existe une matrice M dépendant de a telle que pour tout k de $[\![1, n-1]\!]$, on ait :
$$\begin{pmatrix} p_{k+1} \\ q_{k+1} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} p_k \\ q_k \end{pmatrix}$$
5. (a) Calculer M^n pour tout n de $\mathbb{N}$.
   (b) En déduire la loi de probabilité de X_n et déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} q_n$

Exercice 10

1. Une secrétaire effectue n appels téléphoniques vers n correspondants tirés au sort aléatoirement parmi la population (n est un entier et $n \geq 2$)
   On admet que les n appels constituent n expériences indépendantes et que, pour chaque appel, la probabilité d'obtenir le correpondant demandé est p ($p \in]0, 1[$) et la probabilité de ne pas l'obtenir est q, avec $q = 1 - p$. On note X la variable aléatoire égale au nombre de correspondants obtenus.
   (a) Calculer l'espérance $E(X)$ et la variance $V(X)$.
2. Après ses n recherches, la secrétaire demande une deuxième fois, et dans les mêmes conditions, chacun des $n - X$ correspondants qu'elle n'a pas obtenus la première fois. Soit Y la variable aléatoire égale au nombre de correspondants obtenus dans la deuxième série d'appels, et soit $Z = X + Y$ le nombre total de correspondants obtenus.
   (a) Quelles sont les valeurs prises par Z ?
   (b) Calculer la probabilité $\mathbb{P}(Z = 0)$ et montrer que $\mathbb{P}(Z = 1) = npq^{2n-2}(1 + q)$.
   (c) Calculer la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}((Y = j)/(X = i))$, pour tout i de $\{0, 1, \ldots, n\}$ et pour tout j de $\{0, 1, \ldots, n - i\}$.
   (d) Démontrer que pour tout k de $\{0, 1, \ldots, n\}$:
$$\mathbb{P}(Z = k) = \sum_{i=0}^{k} \mathbb{P}((X = i) \cap (Y = k - i))$$
   (e) Calculer $\mathbb{P}(Z = k)$ et montrer que Z suit la loi binômiale $\mathcal{B}(n, p(1 + q))$ (Vérifier pour cela l'égalité : $\binom{n}{i}\binom{n-i}{k-i} = \binom{n}{k}\binom{k}{i}$)