

TD n° 23 : Exercices sur les applications linéaires.

Exercice 1 Soit les applications :

$$\begin{array}{ccc} f : \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \longmapsto & (2x - 3y, x + 4y) \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} g : \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \longmapsto & (x + y, x + z, x + y) \end{array}$$

1. Démontrer que les applications f et g sont linéaires.
2. Calculer leur noyau et leur image respectifs.
3. Préciser si f (resp. g) est injective, surjective, bijective. Dans ce dernier cas, calculer sa bijection réciproque.

Exercice 2 Les applications suivantes de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ sont-elles linéaires ?

1. $f_1((x, y)) = (1, x + y)$
2. $f_2((x, y)) = (|x|, |y|)$
3. $f_3((x, y)) = (0, x - y)$
4. $f_4((x, y)) = (x^2, y^2)$

Exercice 3 Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice relativement à la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ est :

$$\text{mat}_{\mathcal{B}}(f) = M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculer $\text{Ker } f$ et $\text{Im } f$.

Exercice 4 Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ dont la matrice relativement aux bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et de $\mathbb{R}^2$ (notées respectivement $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ et $\mathcal{B}' = (f_1, f_2)$) est :

$$\text{mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(f) = A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

1. Calculer $\text{Ker } f$ et $\text{Im } f$.
2. Calculer la matrice de f relativement aux bases suivantes :
 - (a) $\mathcal{B}_1 = (e_2, e_3, e_1)$ et $\mathcal{B}'$.
 - (b) $\mathcal{B}_2 = (e_3, e_1, e_2)$ et $\mathcal{B}'$.
 - (c) $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'_1 = (f_2, f_1)$

Exercice 5 Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice relativement à la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ est :

$$\text{mat}_{\mathcal{B}}(f) = A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que f est bijective.
2. Calculer la matrice de f^{-1} relativement à la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$.

Dans les exercices suivants, p désigne un entier naturel non nul.

Exercice 6 Soient f et g deux endomorphismes de $\mathbb{K}^p$.

Montrer que $g \circ f = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{K}^p)}$ (endomorphisme nul) si et seulement si $\text{Im } f \subset \text{Ker } g$.

Exercice 7 Soit f un endomorphisme de $\mathbb{K}^3$ tel que $f^3 = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{K}^3)}$ et $f^2 \neq 0_{\mathcal{L}(\mathbb{K}^3)}$ (ie f endomorphisme nilpotent d'indice de nilpotence 3)

1. Soit u un vecteur de $\mathbb{K}^3$ tel que $f^2(u) \neq 0_{\mathbb{K}^3}$. Montrer que la famille $(u, f(u), f^2(u))$ est une base de $\mathbb{K}^3$, puis donner la matrice de f relativement à cette base.
2. Déterminer $\text{Ker } f$, $\text{Ker } f^2$. Donner le rang de f .

Exercice 8 Soient f et g deux endomorphismes de $\mathbb{K}^p$ tel que $f \circ g = g \circ f$.

Démontrer que $g(\text{Ker } f) \subset \text{Ker } f$ et que $g(\text{Im } f) \subset \text{Im } f$.

Exercice 9 Soient f un endomorphisme de $\mathbb{K}^p$.

1. Ecrire les endomorphismes $f^3 - \text{id}_{\mathbb{K}^p}$ et $f^3 + \text{id}_{\mathbb{K}^p}$ sous forme d'un produit d'endomorphismes.
2. On suppose que $f^3 = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{K}^3)}$. Montrer que $f - \text{id}_{\mathbb{K}^p}$ et $f + \text{id}_{\mathbb{K}^p}$ sont bijectifs et donner leur bijection réciproque.
3. Reprendre l'exercice dans le cas d'un entier non nul m quelconque (remplacer partout 3 par m)

Exercice 10 On appelle *projecteur de $\mathbb{K}^n$* tout endomorphisme p de $\mathbb{K}^n$ tel que : $p \circ p = p$.

1. Établir : $\text{Ker } p \cap \text{Im } p = \{0_{\mathbb{K}^n}\}$.
2. Soit $\mathcal{B}_1 = (e_1, \dots, e_k)$ une base du noyau de f et $\mathcal{B}_2 = (e'_1, \dots, e'_i)$ une base de l'image de f .
On note $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_k, e'_1, \dots, e'_i)$ la famille obtenue en réunissant les familles $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$.
(a) Montrer que la famille $\mathcal{B}$ est libre (on pourra utiliser la question 1).
(b) En déduire que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{K}^n$.
3. Montrer que : $\forall y \in \text{Im } p, \quad p(y) = y$
4. Donner la forme de la matrice représentative de p dans la base $\mathcal{B}$.