Lycée Fénelon **BCPST1**
Année 2021-22 Intégration

TD n° 25 : Calcul intégral

Exercice 1 Calculer en intégrant par parties :

1. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (t^2+t+1)\sin t\,\mathrm{d}t$ (2 IPP en dérivant le polynôme).
2. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2t}\sin t\,\mathrm{d}t$ (2 IPP en dérivant la fonction circulaire)
3. $\displaystyle\int_1^{2} (3t^2+1)\ln t\,\mathrm{d}t$ (Dériver ln).
4. $\displaystyle\int_0^{1} t\,\mathrm{arctan}t\,\mathrm{d}t$ (Dériver arctan)
5. $\displaystyle\int^{x} (t^2+1)e^{2t}\,\mathrm{d}t$ (Dériver le polynôme).

Exercice 2 Calculer, par le changement de variable proposé :

1. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{1+\cos^2 t}\,\mathrm{d}t$ (changement de variable $x=\varphi(t)=\cos t$)
2. $\displaystyle\int^{y} \sin^3 t\,\mathrm{d}t$ (idem)
3. $\displaystyle\int^{y} \frac{1}{t(\ln t)^n}\,\mathrm{d}t$ (changement de variable $x=\varphi(t)=\ln t$)
4. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+2\cos^2 t}\,\mathrm{d}t$ (changement de variable $x=\varphi(t)=\mathrm{tan}t$)
5. $\displaystyle\int_0^{1} \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$ (changement de variable $x=\varphi(t)=\sin t$)
6. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\sqrt{2+t}}{1+t}\,\mathrm{d}t$ (changement de variable $x=\varphi(t)=\sqrt{2+t}$)
7. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{e^t}{1+e^{2t}}\,\mathrm{d}t$ (changement de variable $x=\varphi(t)=e^t$)

Exercice 3 On considère les intégrales suivantes :

$$I=\int_0^1 \frac{1}{t^2+\frac{1}{2}}\,dt,\quad J=\int_0^1 \frac{1}{\left(t^2+\frac{1}{2}\right)^2}\,dt,\quad K=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{(1+\sin^2 x)^2}\,dx$$

Calculer I.Puis, en transformant I à l'aide d'une intégration par parties, calculer J. Effectuer le changement de variable $u=\tan x$ dans l'intégrale K, et en déduire K.

Exercice 4 Soit n un entier naturel et x un réel. On note $I_n(x)$ l'intégrale : $\displaystyle\int_0^x \frac{1}{(1+t^2)^n}dt$

1. (a) Justifier l'existence de $I_n(x)$ pour tout x réel.
   (b) A l'aide d'une intégration par parties, établir une relation entre $I_{n+1}(x)$ et $I_n(x)$.
   (c) Calculer $I_n(x)$ pour n dans l'ensemble $\{0,\, 1,\, 2\}$.

Exercice 5 Soit les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\; u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n+k}\ , \quad v_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(n+k)^{\alpha}(n+k+1)^{\beta}}$$

où $(\alpha,\, \beta)$ sont deux réels positifs tels que : $\alpha + \beta = 1$.

1. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et calculer sa limite.
2. Faire de même pour la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
   (Encadrer d'abord v_n, pour cela, encadrer chacun des $n+1$ termes de cette somme)