Lycée Fénelon
Année 2021-22

BCPST1
Espaces vectoriels

TD n° 22 : Exercices sur les espaces vectoriels

Exercice 1 Les sous-ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels ?

1. $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ y = 2x\}$
2. $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ |y| = |x|\}$
3. $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x + y = 1\}$
4. $F = \{(x, y) \in \mathbb{K}^2 \ / \ ax + by = 0\}$ où $(a, b) \in \mathbb{K}^2$
5. $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x + y \geq 0\}$
6. $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x + y - z = 0 \text{ et } x + 2z = 0\}$

Exercice 2 Soient les sous-ensembles de $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{cases} P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x + 2y - z = 0\} \\ D = \{\lambda.(-1, 1, 2) \ / \ \lambda \in \mathbb{R}\} \end{cases}$$

1. Montrer que P et D sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer une base (u_1) de D et une base $(u_2,\ u_3)$ de P.
3. (a) Montrer que $(u_1,\ u_2,\ u_3)$ est une famille libre de $\mathbb{R}^3$.
   (b) En déduire que $(u_1,\ u_2,\ u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et que tout vecteur u de $\mathbb{R}^3$ *s'écrit de manière unique* comme somme d'un vecteur de D et d'un vecteur de P.

Exercice 3

1. Les familles suivantes sont-elles libres ? génératrices de $\mathbb{R}^2$?
   (a) (u), où $u = (-1, 1)$.
   (b) (u, v), où $u = (-1, 1)$ et $v = (2, -2)$.
   (c) (u, v), où $u = (-1, 1)$ et $v = (2, 1)$.
   (d) (u, v, w), où $u = (-1, 1)$, $v = (2, 1)$ et $w = (1, 1)$.
2. Les familles suivantes sont-elles libres ? génératrices de $\mathbb{R}^3$?
   (a) (u, v), où $u = (1, 1, 0)$ et $v = (0, 1, 2)$.
   (b) (u, v, w), où $u = (1, 0, 0)$ et $v = (1, 1, 0)$ et $w = (1, 1, 1)$.
   (c) (u, v, w), où $u = (1, -1, 0)$, $v = (0, 1, -1)$ et $w = (-1, 0, 1)$.
   (d) (u, v, w), où $u = (1, 2, 0)$, $v = (0, 1, 2)$ et $w = (2, 0, 1)$.
   (e) (u, v, w, t), où $u = (1, 0, 0)$, $v = (1, 1, 0)$, $w = (1, 1, 1)$ et $t = (2, 1, -1)$.

Exercice 4

1. Dans $\mathbb{R}^2$, déterminer des équations cartésiennes des sous-espaces vectoriels engendrés par les familles suivantes :
   (a) $\{(1,3)\}$
   (b) $\{(3,2),(-4,1)\}$
   (c) $\left\{\left(-\frac{2}{3},3\right),\left(1,-\frac{9}{2}\right)\right\}$
   (d) $\{(\alpha,\beta)\}$, où $(\alpha,\beta)\neq(0,0)$
2. Même question dans $\mathbb{R}^3$, avec la famille :
   (a) $\{(1,-1,2)\}$
   (b) $\{(1,-1,2),(2,0,1)\}$

Exercice 5 Dans $\mathbb{R}^3$, à quelles conditions sur le paramètre réel m la famille (u,v,w) suivante est-elle une base de $\mathbb{R}^3$?

1. avec $u=(1,2,1)$, $v=(2,3,-1)$ et $w=(1,1,m)$
2. avec $u=(2-m,-1,0)$, $v=(-1,2-m,-1)$ et $w=(0,-1,2-m)$

Exercice 6 Donner une base et la dimension du sous-espace vectoriel F suivant :

1. $F=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \ / \ y=2x\}$
2. $F=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \ / \ x+y+z=0\}$
3. $F=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \ / \ x-y+z=0 \text{ et } 2x+z=0\}$

Exercice 7 Déterminer le rang de la famille de vecteurs de $\mathbb{R}^4$ (resp. $\mathbb{C}^4$) (u_1,u_2,u_3,u_4) suivante et donner éventuellement une relation entre ces vecteurs :

$u_1=(1,0,2,4)$, $u_2=(3,2,0,1)$, $u_3=(0,-2,2,-1)$ et $u_4=(1,0,1,1)$.

Exercice 8 Déterminer le rang des familles de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ (u_1,u_2,u_3) suivante (discuter suivant les valeurs des réels α, β et γ) :

1. $u_1=(\alpha,1,1)$, $u_2=(1,\alpha,1)$ et $u_3=(1,1,\alpha)$.
2. $u_1=(0,\gamma,-\beta)$, $u_2=(-\gamma,0,\alpha)$ et $u_3=(\beta,-\alpha,0)$

Exercice 9 Dans $\mathbb{R}^4$, on considère les sous-ensembles suivants :

$$F=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 \ / \ x-y+z-t=0\}$$
$$G=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 \ / \ x+y+z+t=0\}$$

1. Démontrer que F et G sont deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$ et donner une base de chacun d'eux.
2. Déterminer une base de $F\cap G$ et la compléter en une base de F et en une base de G.