Lycée Fénelon
Année 2021-22

BCPST1
Limites et continuité

TD n° 18 : Limites de fonction. Continuité

Limite de fonction

Exercice 1 Calcul de limites, avec indications et résultats.

1. Montrer que : (indication : écrire $u^v = e^{v \ln u}$)

$$\lim_{x \mapsto 0} (1+x)^x = 1 \quad ; \quad \lim_{x \mapsto 0} x^x = 1 \quad ; \quad \lim_{x \mapsto +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

2. Montrer que : (indication : utiliser la quantité conjuguée lorsque nécessaire)

$$\lim_{x \mapsto +\infty} (\sqrt{x^2+2} - 3x) = -\infty \quad ; \quad \lim_{x \mapsto +\infty} (\sqrt{x^2+2x+1} - x) = 1$$

3. Montrer que : (ind. a) : multiplier par $1 + \cos(x)$. b) : écrire $\frac{e^x - 1}{x} x \ln x$)

$$a) \lim_{x \mapsto 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2} \quad ; \quad b) \lim_{x \mapsto 0^+} (e^x - 1) \ln x = 0$$

4. Montrer que : (ind. : appliquer le théorème des gendarmes)

$$\lim_{x \mapsto 0} x \cos \frac{1}{x} = 0 \quad ; \quad \lim_{x \mapsto +\infty} \frac{\exp(\cos x)}{x} = 0$$

Exercice 2 Calculer les limites suivantes aux points précisés :

1. $f(x) = \dfrac{x^2 + |x|}{x^2 - |x|}$ en $-\infty$, -1, 0, 1, $+\infty$.
2. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+3} - \sqrt{4x+3}}{\sqrt{x+4} - \sqrt{2x+4}}$ en 0 et $+\infty$.
3. $f(x) = \dfrac{1 - \cos x}{x^2}$; $g(x) = \dfrac{|\sin x|}{x}$; $h(x) = \dfrac{\tan x}{x}$; $k(x) = \dfrac{x \sin 2x}{\tan 3x}$ en 0.
4. $f(x) = \dfrac{\sqrt{1 + \sin x} - \sqrt{1 - \sin x}}{x}$ en 0.
5. $\dfrac{\sqrt{2} \sin x - 1}{\tan x - 1}$ en $\dfrac{\pi}{4}$ et $\dfrac{\pi}{2}$.
6. $\ln\left(\dfrac{2x+3}{x-1}\right)$ en $-\dfrac{3}{2}$, 1 et $+\infty$.

7. $f(x) = \dfrac{\lfloor x \rfloor}{x}$ en 0, en $+\infty$ et en $-\infty$; $g(x) = \dfrac{1}{x-1}(x - \lfloor x \rfloor)$ en 1.
8. $f(x) = \cos\left(x \sin \dfrac{1}{x}\right)$; $g(x) = (1-\cos x)\text{cotan}^2 x$ en 0.
9. $f(x) = x \ln|\sin x|$; $g(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{\sin x}$ en 0.
10. $f(x) = \sqrt{x}\ln(x^2)$; $g(x) = x(\ln x)^2$; $h(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{x \ln x}$; $k(x) = \ln x \ln(1+x)$ en 0.

Exercice 3 1. Démontrer que les fonctions cosinus et sinus n'admettent pas de limites en $+\infty$ (on pourra respectivement utiliser les suites $(n\pi)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\frac{\pi}{2} + n\pi)_{n\in\mathbb{N}}$).

2. Montrer que $f(x) = \cos \frac{1}{x}$ n'a pas de limite en 0.

Exercice 4 Soit f une fonction périodique. Montrer que si f admet une limite finie en $+\infty$, alors f est constante.

En déduire que cos et sin n'ont pas de limite en $+\infty$.

Exercice 5 Déterminer les limites suivantes :

1. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{2\sin 3x}{2x - 3\sin 2x}$,
2. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \sin x \ln(\tan x)$,
3. $\displaystyle\lim_{x\to 1} \ln(1-x)\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$,
4. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{\sqrt{1+\sin x}} - e}{\tan x}$.
5. $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln(1+x^\alpha)}{\ln(x)}$ avec $\alpha > 0$.
6. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(\sin(x))}{\ln(x)}$
7. $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \left(\frac{\ln(1+x)}{\ln x}\right)^{x\ln x}$

Continuité

Exercice 6 Déterminer les ensembles de continuité des fonctions suivantes : $f_1 : x \mapsto \ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$, $f_2 : x \mapsto \ln(x^2 - 5x + 6)$, $f_3 : x \mapsto \ln(2\sin x + 1)$, $f_4 : x \mapsto \sqrt{\ln x}$ et $f_5 : x \mapsto \sqrt{\cos x + \sin x}$

Exercice 7 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \sin(x) & \text{si} \quad x \geq 0 \\ x & \text{si} \quad -1 < x < 0 \\ \ln|x| & \text{si} \quad x \leq -1 \end{cases}$$

Etudier la continuité de f en tout point de $\mathbb{R}$.

Exercice 8 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $\quad f(x) = \dfrac{1 - \cos x}{x}$
Etudier la continuité de f. Montrer qu'on peut prolonger f par continuité en 0.

Exercice 9 Montrer qu'une fonction continue et périodique sur $\mathbb{R}$ est bornée et qu'elle atteint ses bornes.

Exercice 10 Soient a et b deux réels tels que $a < b$ et f une fonction continue sur $[a, b]$ telle que $f([a, b]) \subset [a, b]$. Montrer que f admet un point fixe.

Exercice 11 Soit f la fonction définie par : $\quad f(x) = \left(\dfrac{x}{x-1}\right)^{x-1} - \left(\dfrac{x+1}{x}\right)^{x+1}$.
On rappelle que la notation $h(x)^{g(x)}$ désigne : $e^{g(x)\ln(h(x))}$

1. Calculer l'ensemble de définition de f et étudier la continuité de f.
2. Montrer que f est impaire.
3. Montrer que f admet un prolongement par continuité en 1 et en -1.
4. Etudier la limite de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

Exercice 12 Déterminer toutes les fonction continues sur $\mathbb{R}$ vérifiant pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = f(x)^2 \ .$$

Exercice 13 On souhaite déterminer toutes les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ et vérifiant :

$$(H) \qquad \begin{cases} f \text{ est continue en } 0 \\ \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(2x) \end{cases}$$

Dans la suite f désigne une telle fonction.

1. Montrer pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$, $f\left(\dfrac{x}{2^n}\right) = f(x)$.
2. En déduire que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = f(0)$.
3. Conclure.

Exercice 14 L'objectif est de déterminer toutes les fonctions réelles f définies sur $\mathbb{R}$ vérifiant :

$$\left\{ \begin{array}{l} f \text{ est continue en } 0 \text{ et en } 1 \\ \forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x^2) = f(x) \end{array} \right.$$

1. Démontrer que f est paire.
2. Soit x un réel strictement positif.
   (a) Démontrer par récurrence que :

   $$\forall\, n \in \mathbb{N},\ f\left(x^{\frac{1}{2^n}}\right) = f(x)$$

   (b) On note (u_n) la suite définie par son terme général : $u_n = x^{\frac{1}{2^n}}$. Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.
   (c) Déduire de (a) et (b) que $f(x) = f(1)$.
3. En question 2. on a établi que f est constante sur $]0, +\infty[$. Démontrer que f est constante sur $[-\infty\,;\,0\,[$, puis sur $\mathbb{R}$.
4. Conclure.