

TP : Feuille d'Exercices 6*Loi de Poisson**Loi de Poisson*

Une v.a.r. X suit une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ de paramètre $\lambda > 0$ lorsque :

$$X(\Omega) = \mathbb{N} \quad \text{et} \quad \forall k \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}$$

Elle donne la probabilité du nombre de fois où se produira un évènement dans un laps de temps donné, lorsque chaque évènement survient indépendamment du temps écoulé depuis le précédent, et lorsque le nombre moyen est connu égal à λ .

Par exemple, le nombre de personnes visitant un lieu touristique un jour donné, suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ où λ est le nombre moyen de visiteurs journaliers.

Exercice 1. Tracé de l'histogramme et de la fonction de répartition d'une loi de Poisson

- (1) Ecrire une fonction **factorielle** prenant en paramètre un entier positif n et qui retourne la valeur de $n!$.
- (2) Ecrire une fonction **loiPoisson** prenant en paramètre un nombre $l > 0$ et un entier k positif et qui retourne $\mathbb{P}(X = k)$ lorsque X suit la loi de Poisson de paramètre l .
- (3) Tracer l'histogramme de la loi de Poisson de paramètre $\lambda = 5$ pour k variant de 0 à 20. Tracer aussi l'histogramme de la fonction de répartition de la loi de Poisson de même paramètre au dessus du même ensemble.

Exercice 2. *Simulation d'une loi de Poisson.* Pour simuler une loi de Poisson, on peut appliquer le *paradigme de Poisson* :

Paradigme de Poisson.

Lorsque n tend vers $+\infty$, la loi binomiale $\mathcal{B}(n, \lambda/n)$ tend vers la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$. Plus précisément, si $X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n, \lambda/n)$ et $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$, alors pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$|\mathbb{P}(X_n = k) - \mathbb{P}(X = k)| \leq \frac{\lambda^2}{n}.$$

Dans la pratique, dès que $n > 10\lambda^2$, on peut supposer que $\mathcal{B}(n, \lambda/n)$ est approximativement la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$.

- (1) Ecrire une fonction **simulLoiPoisson(1)** prenant en paramètre un nombre $l > 0$ qui simule une expérience aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre l ;

pour cela on simulera la loi binomiale $\mathcal{B}(n, l/n)$ avec $n = \lfloor 10 \times l^2 \rfloor + 1$.

- (2) Ecrire une fonction `simulEspPoisson(1,N)` qui appelle N fois la fonction `simulLoiPoisson(1)` et retourne une estimation de $E(X)$ pour $X \hookrightarrow \mathcal{B}(l)$.
- (3) Ecrire une fonction `FreqLoiPoisson(1,N)` qui appelle n fois la fonction `simulLoiPoisson(1)` et retourne la liste des fréquences d'apparition des différentes valeurs obtenues.
- (4) Utiliser cette fonction pour obtenir tracer l'histogramme de la loi de Poisson $\mathcal{P}(5)$; on pourra prendre $N = 10000$.