TD 21 - Résolution d'équations différentielles du 2nd Ordre

Informatique
MPSI-PCSI - Lycée Thiers

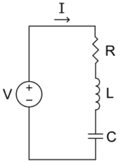
Exercice 1 : Circuit RLC en série.
- Enoncé
- Correction

Exercice 2 : Mouvement d'un pendule
- Enoncé
- Correction

Exercice 1 : Circuit RLC en série.

Circuit RLC en série.

On considère un circuit électrique constitué d'une source de tension V, d'une résistance R, d'une bobine L et d'une capacité C montés en série.



La tension aux bornes de la bobine satisfait alors l'équation différentielle :

$$\frac{d^2 u_L}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{du_L}{dt} + \frac{1}{LC}u_L = \frac{d^2 V}{dt^2}$$

1. Tracer la courbe de la tension aux bornes de la bobine pour $V(t) = \sin(2\pi ft)$ sur un intervalle de temps de 1 seconde (on prendra 10000 points). pour $f = 100Hz$, $R = 10\Omega$, $L = 870mH$, $C = 650mF$. A l'instant initial aux bornes de la bobine la tension est nulle ainsi que sa dérivée.

Exercice 1 : Correction.

Rappel : Obtention de l'équation différentielle vérifiée par u_L.

• Soit i l'intensité (en fonction du temps t). Les tensions aux bornes de la résistance u_R, de la bobine u_L, et du condensateur u_C vérifient :

$$\boxed{u_R = Ri, \qquad u_L = L\frac{di}{dt}, \qquad i = C\frac{du_C}{dt}}$$

Exercice 1 : Correction.

Rappel : Obtention de l'équation différentielle vérifiée par u_L.

• Soit i l'intensité (en fonction du temps t). Les tensions aux bornes de la résistance u_R, de la bobine u_L, et du condensateur u_C vérifient :

$$\boxed{u_R = Ri, \qquad u_L = L\frac{di}{dt}, \qquad i = C\frac{du_C}{dt}}$$

• Loi des mailles : $\boxed{u_R + u_L + u_C = V}$.

Exercice 1 : Correction.

Rappel : Obtention de l'équation différentielle vérifiée par u_L.

• Soit i l'intensité (en fonction du temps t). Les tensions aux bornes de la résistance u_R, de la bobine u_L, et du condensateur u_C vérifient :

$$\boxed{u_R = Ri, \qquad u_L = L\frac{di}{dt}, \qquad i = C\frac{du_C}{dt}}$$

• Loi des mailles : $\boxed{u_R + u_L + u_C = V}$.

On la dérive une première fois :

$$\begin{aligned} & \frac{du_R}{dt} + \frac{du_L}{dt} + \frac{du_C}{dt} = \frac{dV}{dt} \\ \Longrightarrow \quad & R\frac{di}{dt} + \frac{du_L}{dt} + \frac{i}{C} = \frac{dV}{dt} \\ \Longrightarrow \quad & \frac{R}{L}u_L + \frac{du_L}{dt} + \frac{i}{C} = \frac{dV}{dt} \end{aligned}$$

Exercice 1 : Correction.

Rappel : Obtention de l'équation différentielle vérifiée par u_L.

• Soit i l'intensité (en fonction du temps t). Les tensions aux bornes de la résistance u_R, de la bobine u_L, et du condensateur u_C vérifient :

$$\boxed{u_R = Ri, \qquad u_L = L\frac{di}{dt}, \qquad i = C\frac{du_C}{dt}}$$

• Loi des mailles : $\boxed{u_R + u_L + u_C = V}$.

On la dérive une première fois :

$$\begin{aligned} & \frac{du_R}{dt} + \frac{du_L}{dt} + \frac{du_C}{dt} = \frac{dV}{dt} \\ \Longrightarrow \quad & R\frac{di}{dt} + \frac{du_L}{dt} + \frac{i}{C} = \frac{dV}{dt} \\ \Longrightarrow \quad & \frac{R}{L}u_L + \frac{du_L}{dt} + \frac{i}{C} = \frac{dV}{dt} \end{aligned}$$

On encore dérive une seconde fois :

$$\frac{R}{L}\frac{du_L}{dt} + \frac{d^2u_L}{dt^2} + \frac{1}{C}\frac{di}{dt} = \frac{d^2V}{dt^2}$$

Exercice 1 : Correction.

Rappel : Obtention de l'équation différentielle vérifiée par u_L.

• Soit i l'intensité (en fonction du temps t). Les tensions aux bornes de la résistance u_R, de la bobine u_L, et du condensateur u_C vérifient :

$$\boxed{u_R = Ri, \qquad u_L = L\frac{di}{dt}, \qquad i = C\frac{du_C}{dt}}$$

• Loi des mailles : $\boxed{u_R + u_L + u_C = V}$.

On la dérive une première fois :

$$\begin{aligned} & \frac{du_R}{dt} + \frac{du_L}{dt} + \frac{du_C}{dt} = \frac{dV}{dt} \\ \Longrightarrow \quad & R\frac{di}{dt} + \frac{du_L}{dt} + \frac{i}{C} = \frac{dV}{dt} \\ \Longrightarrow \quad & \frac{R}{L}u_L + \frac{du_L}{dt} + \frac{i}{C} = \frac{dV}{dt} \end{aligned}$$

On encore dérive une seconde fois :

$$\frac{R}{L}\frac{du_L}{dt} + \frac{d^2u_L}{dt^2} + \frac{1}{C}\frac{di}{dt} = \frac{d^2V}{dt^2} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\frac{d^2u_L}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{du_L}{dt} + \frac{1}{LC}u_L = \frac{d^2V}{dt^2}}$$

Exercice 1 : Correction.

- u_L satisfait l'équation différentielle : $\boxed{\dfrac{d^2 u_L}{dt^2} + \dfrac{R}{L}\dfrac{du_L}{dt} + \dfrac{1}{LC} u_L = \dfrac{d^2 V}{dt^2}}$.

C'est une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficient constant, avec second membre :

$$\boxed{y'' + \frac{R}{L} y' + \frac{1}{LC} y = -4\pi^2 f^2 \sin(2\pi f t) = \frac{d^2 V}{dt^2}}$$

et un problème de Cauchy avec les conditions initiales $y(0) = y'(0) = 0$.

Exercice 1 : Correction.

- u_L satisfait l'équation différentielle : $\boxed{\dfrac{d^2u_L}{dt^2} + \dfrac{R}{L}\dfrac{du_L}{dt} + \dfrac{1}{LC}u_L = \dfrac{d^2V}{dt^2}}$.

C'est une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficient constant, avec second membre :

$$\boxed{y'' + \frac{R}{L}y' + \frac{1}{LC}y = -4\pi^2 f^2 \sin(2\pi ft) = \frac{d^2V}{dt^2}}$$

et un problème de Cauchy avec les conditions initiales $y(0) = y'(0) = 0$.

- On l'écrit comme un système de deux équations différentielles :

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = y' \\ \dfrac{dy'}{dt} = \dfrac{d^2V}{dt^2} - \dfrac{R}{L}y' - \dfrac{1}{LC}y \end{cases} \quad \text{en posant } Y = \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \frac{d}{dt}Y = \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y' \\ \dfrac{d^2V}{dt^2} - \dfrac{R}{L}y' - \dfrac{1}{LC}y \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Y(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 1 : Correction.

1) Résolution. Pour l'exemple nous appliquons 3 méthodes.

```
import numpy as np
from numpy import sin, pi
# Constantes du problème
f = 100     # f = 100 Hz
R = 10      # R = 10 Ohms
L = 0.87     # L = 870 mH
C = 0.65     # C = 650 mF
w = 2*pi*f
N = 10000
```

Exercice 1 : Correction.

1) Résolution. Pour l'exemple nous appliquons 3 méthodes.

```
import numpy as np
from numpy import sin, pi
# Constantes du problème
f = 100     # f = 100 Hz
R = 10      # R = 10 Ohms
L = 0.87     # L = 870 mH
C = 0.65     # C = 650 mF
w = 2*pi*f
N = 10000
# 1ere Méthode : Euler appliqué à un système
T = np.linspace(0,1,N)
U, Z = np.empty(N), np.empty(N)
U[0], Z[0] = 0, 0
dt = 1/(N-1)
for k in range(N-1):
    U[k+1] = U[k] + dt * Z[k]
    Z[k+1] = Z[k] + dt * (-R/L*Z[k]-U[k]/L/C-w**2*sin(w*T[k]))
```

Exercice 1 : Correction.

```
# Tracé
import matplotlib.pyplot as plt
plt.figure(1)
plt.clf()
plt.plot(T,U,label="Euler")
```

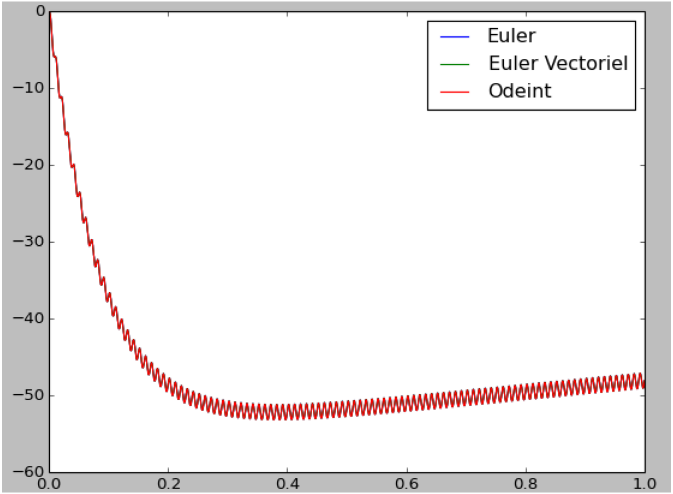
Exercice 1 : Correction.

```
# Tracé
import matplotlib.pyplot as plt
plt.figure(1)
plt.clf()
plt.plot(T,U,label="Euler")
# 2eme méthode : Euler appliqué à une equa-diff vectorielle
# Fonction second membre :
Phi = lambda Y,t: np.array([Y[1],-R/L*Y[1]-Y[0]/L/C-w**2*sin(w*t)])
Y0 = np.array([0,0])
Y = [Y0] + [None] * (N-1)
for k in range(N-1):
    Y[k+1] = Y[k] + dt * Phi(Y[k],T[k])
y = [ x[0] for x in Y ]
plt.plot(T,y,label = "Euler Vectoriel")
```

Exercice 1 : Correction.

```
# Tracé
import matplotlib.pyplot as plt
plt.figure(1)
plt.clf()
plt.plot(T,U,label="Euler")
# 2eme méthode : Euler appliqué à une equa-diff vectorielle
# Fonction second membre :
Phi = lambda Y,t: np.array([Y[1],-R/L*Y[1]-Y[0]/L/C-w**2*sin(w*t)])
Y0 = np.array([0,0])
Y = [Y0] + [None] * (N-1)
for k in range(N-1):
    Y[k+1] = Y[k] + dt * Phi(Y[k],T[k])
y = [ x[0] for x in Y ]
plt.plot(T,y,label = "Euler Vectoriel")
# 3eme méthode : avec odeint
from scipy.integrate import odeint
Y = odeint(Phi,Y0,T)
plt.plot(T,Y[:,0],label = "Odeint")
plt.legend()
```

Exercice 1 : Correction.



Exercice 2 : Mouvement d'un pendule

Un pendule de masse m soumis à un champ de pesanteur constant se déplace dans un plan vertical ; il est situé au bout d'une tige rigide de longueur l et de masse nulle tournant sans frottement autour de son extrémité fixe.

L'élongation angulaire $\theta(t)$ satisfait l'équation différentielle :

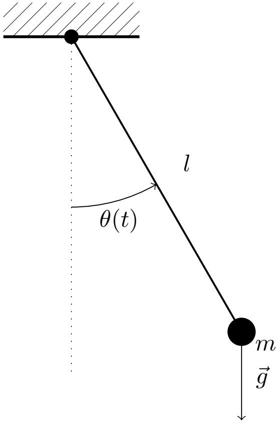
$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l} \sin\theta$$

1. Résoudre numériquement l'équation différentielle avec une position initiale égale à $\theta(0) = \frac{\pi}{2}$, une vitesse initiale nulle, et avec $g = 9,81 m.s^{-1}$ et $l = 10cm$.
2. Vérifier la propriété de conservation de l'énergie, c'est à dire que :

$$\frac{1}{2}\, l^2 \left[\dot{\theta}(t)\right]^2 - g\, l \cos\theta(t)$$

reste constant au cours du temps.

Exercice 2 : correction



Exercice 2 : correction

Equation différentielle vérifiée par l'élongation angulaire :

L'énergie mécanique du système est :

$$\begin{aligned} E_m = E_c + E_p &= \frac{1}{2}mv^2 + mg(h + cte) \\ &= \frac{1}{2}m\left(l\dot{\theta}\right)^2 + mgl(1 - \cos\theta) \end{aligned}$$

Exercice 2 : correction

Equation différentielle vérifiée par l'élongation angulaire :

L'énergie mécanique du système est :

$$\begin{aligned} E_m = E_c + E_p &= \frac{1}{2} m v^2 + mg(h + cte) \\ &= \frac{1}{2} m \left(l \dot{\theta} \right)^2 + mgl(1 - \cos\theta) \end{aligned}$$

En l'absence de frottement l'énergie mécanique du système est constante.

Exercice 2 : correction

Equation différentielle vérifiée par l'élongation angulaire :

L'énergie mécanique du système est :

$$\begin{aligned} E_m = E_c + E_p &= \frac{1}{2}mv^2 + mg(h + cte) \\ &= \frac{1}{2}m\left(l\dot{\theta}\right)^2 + mgl(1 - \cos\theta) \end{aligned}$$

En l'absence de frottement l'énergie mécanique du système est constante. C'est à dire : $\dfrac{dE_m}{dt} = 0$

Exercice 2 : correction

Equation différentielle vérifiée par l'élongation angulaire :

L'énergie mécanique du système est :

$$\begin{aligned} E_m = E_c + E_p &= \frac{1}{2} m v^2 + mg(h + cte) \\ &= \frac{1}{2} m \left(l\dot{\theta}\right)^2 + mgl(1 - \cos\theta) \end{aligned}$$

En l'absence de frottement l'énergie mécanique du système est constante. C'est à dire : $\frac{dE_m}{dt} = 0$

$$\begin{aligned} \frac{dE_m}{dt} &= ml^2\dot{\theta}\ddot{\theta} + mgl\dot{\theta}\sin\theta = 0 \\ &\underset{\dot{\theta}\neq 0}{\Longleftrightarrow} \ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0 \\ &\Longleftrightarrow \boxed{\ddot{\theta} = -\frac{g}{l}\sin\theta} \end{aligned}$$

Exercice 2 : correction

1&2) Résolution avec Euler appliqué à un système :

```
g = 9.81
l = 0.1
Tmax = 6
N = 10000
T = np.linspace(0,Tmax,N+1)
dt = Tmax/N
Y = np.empty(N+1)
Z = np.empty(N+1)
Y[0] = pi/2
Z[0] = 0
for k in range(N):
    Y[k+1] = Y[k] + dt * Z[k]
    Z[k+1] = Z[k] + dt * (-g/l*sin(Y[k]))
E = 0.5 *l**2*Z**2-g*l*np.cos(Y)
plt.figure(2)
plt.plot(T,Y,label="Euler")
plt.plot(T,E,label="Energie")
plt.legend()
```

Exercice 2 : correction

1) Résolution avec Euler vectoriel :

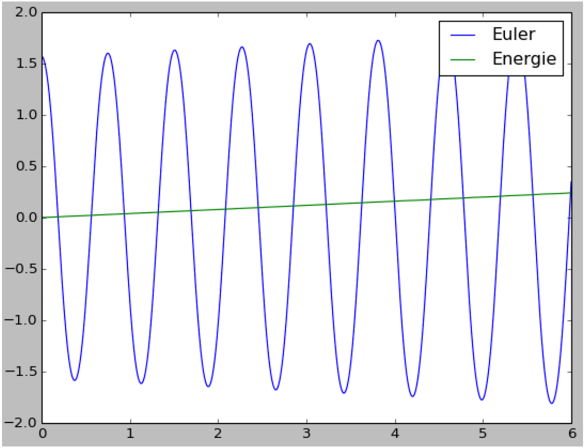
```
g = 9.81
l = 0.1
N = 10000
T = np.linspace(0,6,N)
dt = 6/(N-1)
Y0 = np.array([pi/2,0])
Y = [Y0] + [None] *(N-1)
Phi = lambda Y, t: np.array([Y[1], -g/l*sin(Y[0])])
for k in range(N-1):
    Y[k+1] = Y[k] + dt * Phi(Y[k], T[k])
E = [0.5*l**2*x[1]**2-g*l*np.cos(x[0]) for x in Y]
plt.figure(2)
plt.clf()
y = [x[0] for x in Y]
plt.plot(T,y,label="Euler")
plt.plot(T,E,label="Energie")
plt.legend()
```

Exercice 2 : correction

1) Résolution avec Odeint :

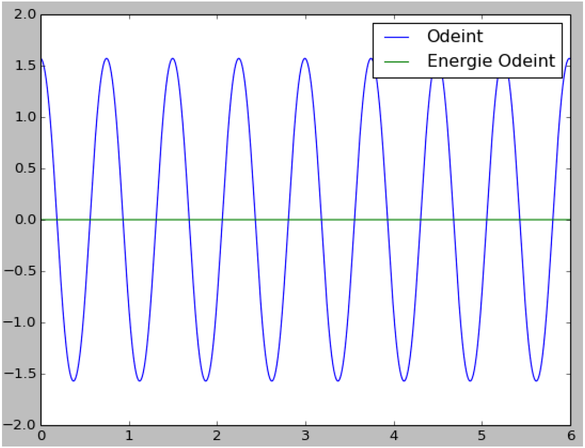
```
# avec Odeint
Y0 = [pi/2,0]
Phi = lambda Y,t : [Y[1], -g/l*sin(Y[0])]
Yo = odeint(Phi,Y0,T)
plt.figure(3)
plt.plot(T,Yo[:,0],label='Odeint')
Eo = 0.5 *l**2*Yo[:,1]**2-g*l*np.cos(Yo[:,0])
plt.plot(T,Eo,label="Energie Odeint")
plt.legend()
```

Exercice 2 : correction



La résolution à l'aide de la méthode d'Euler donne un résultat insatisfaisant : avec 10000 points, l'énergie semble non conservative, et le mouvement va s'amplifiant !

Exercice 2 : correction



La résolution à l'aide de la fonction prédéfinie donne un résultat satisfaisant : l'énergie semble conservative, et le mouvement périodique, come attendu.