TD 12 -

Représentation des nombres réels.

Informatique
PCSI - Lycée Thiers

Exercice 1 : Ecriture normalisée des nombres flottants

Enoncé

Corrigé

Exercice 2 : Recherche des racines d'un trinôme

Enoncé

Réponse

Exercice 3

Enoncé

Corrigé

Exercice 1

Exercice 1. Dans la représentation normalisée des nombres flottant sur 32 bits :

$$x = \varepsilon \times m \times 2^e$$
$$\varepsilon = \pm 1 \quad ; \quad m \in [1, 2[\quad ; \quad e \in \mathbb{Z}$$

- Le bit de poids fort représente le signe : 1 pour négatif, 0 pour positif,
- Les 8 bits suivants représentent l'écriture binaire de $e + 127$.
- les 23 bits suivants représentent l'écriture binaire après la virgule de $m-1$.

Corrigé

1. Comment s'écrit le nombre -1.0 ?

$$: -1,0 = -1 \times 2^0$$

Signe : $-$; exposant $0 \implies 0 + 127 = 127$; mantisse $m = 1$

1 01111111 000000000000000000000000

2. Comment s'écrit le nombre 1.5 ?

$$1.5 = +1.5 \times 2^0$$

Signe : $+$; exposant $0 \implies 0 + 127 = 127$; mantisse $m = 1.5$

$$\implies \overline{m - 1} = 0,1$$

0 01111111 100000000000000000000000

Corrigé

1. Comment s'écrit le nombre 4.75 ?

$$4.75 = 4 + 1/2 + 1/4 = 2^2 + 2^{-1} + 2^{-2} = +(1 + 2^{-3} + 2^{-4}) \times 2^2$$

$$\text{Signe : } + ; \text{ exposant } 2 \implies 2 + 127 = 129 ;$$

$$\text{mantisse } m = 1 + 2^{-3} + 2^{-4} \implies m - 1 = \overline{0,0011}$$

0 10000001 001100000000000000000000

2. Quel nombre représente :

101111111 110000000000000000000000

$$\text{Signe : } - ; \text{ Exposant : } e + 127 = 127 \implies e = 0$$

$$\text{mantisse : } m = \overline{1,11} = 1 + 1/2 + 1/4 = 1,75.$$

C'est le nombre $-1,75$.

Corrigé

1. Quel nombre représente :

0 10000001 001000000000000000000000

Signe : + ; Exposant : $e + 127 = 129 \implies e = 2$

mantisse : $m = \overline{1,001} = 1 + 1/8 = 1,125$.

C'est le nombre $(1 + 1/8) \times 2^2 = 4 + 1/2 = +4,5$.

2. Quel nombre représente :

1 01111110 100000000000000000000000

Signe : - ; Exposant : $e + 127 = 126 \implies e = -1$

mantisse : $m = \overline{1,1} = 1 + 1/1 = 1,5$.

C'est le nombre $-(1 + 1/2) \times 2^{-1} = -(0,5 + 1/4) = -0,75$.

Exercice 2

Racines d'un polynôme de degré 2

1. Reprendre la fonction `trinome(a,b,c)` du TD 3 prenant en paramètres 3 nombres à virgule flottante `a`, `b`, `c` et qui à l'aide du discriminant retourne la ou les racines du polynôme de degré 2 :
 $P(X) = aX^2 + bX + c.$
2. Appliquer la recherche de racines au polynôme :

$$X^2 + X + \frac{1 + 2^{-53}}{4}$$

en appelant `racine_trinome(1,1,(1+2**-53)/4)`.

3. Définir la variable `e = -53`, et lancer l'instruction de comparaison avec 0 :

```
>>> e = - 53  
>>> 1 + 2**e - 1 == 0
```

Recommencer après l'affectation : `e = -52`. Discuter de la validité du résultat trouvé à la question précédente.

4. Faire de même avec le polynôme :

Exercice 2 : Réponse

1)

```
def trinome(a,b,c):
    assert a != 0
    D = b**2 - 4*a*c
    if D == 0 :
        print("Une seule racine")
        return -b/(2*a)
    elif D > 0 :
        print("Deux racines réelles")
        return (-b-D**0.5)/(2*a), (-b+D**0.5)/(2*a)
    else:
        print("Deux racines complexes conjuguées")
        return (-b-1j*(-D)**0.5)/(2*a),
(-b+1j*(-D)**0.5)/(2*a)
```

Exercice 2 : Réponse

2)

```
In [1] : e = -53  
In [2] : a, b, c = 1, 1, (1.0+2**e)/4.0  
In [3] : trinome(a,b,c)  
Une seule racine  
Out [3] : -0.5
```

```
In [4] : e = -53  
In [5] : 1.0 + 2**e == 1  
Out [5] : True  
In [6] : 2**e == 0  
Out [6] : False  
In [7] : e = -52  
In [8] : 1.0 + 2**e == 1  
Out [8] : False
```

Problème dans la comparaison d'un nombre à virgule flottante avec 0.

Exercice 2 : Réponse

3) De même

$$X^2 - \sqrt{2}X + \frac{1}{2}$$

a discriminant $\Delta = (\sqrt{2})^2 - 2 = 0$.

On obtient pourtant deux racines distinctes.

Exercice 3

1. Quel est le plus petit nombre > 1 qui peut être représenté sur un ordinateur 64 bits ? Quels sont les 2 suivants ?
2. Quel est le plus petit nombre > 2 qui peut être représenté sur un ordinateur 64 bits ? Quels sont les 2 suivants ?
3. Quel est le plus petit nombre > 4 qui peut être représenté sur un ordinateur 64 bits ? Quels sont les 2 suivants ?
4. Quel est le plus petit nombre $> 1/2$ qui peut être représenté sur un ordinateur 64 bits ? Quels sont les 2 suivants ?
5. Combien de nombres entre 1 inclu et 2 exclu peut -on représenter ?
Combien entre 2 et 4 ? Combien entre $1/2$ et 1 ?

Exercice 3

1. Quel est le plus petit nombre > 1 qui peut être représenté sur un ordinateur 64 bits? Quels sont les 2 suivants?
Réponse : $1 + 2^{-52}$; $1 + 2 \times 2^{-52}$; $1 + 3 \times 2^{-52}$.
2. Quel est le plus petit nombre > 2 qui peut être représenté sur un ordinateur 64 bits? Quels sont les 2 suivants?
Réponse : $2 + 2^{-51}$; $2 + 2 \times 2^{-51}$; $2 + 3 \times 2^{-51}$.
3. Quel est le plus petit nombre > 4 qui peut être représenté sur un ordinateur 64 bits? Quels sont les 2 suivants?
Réponse : $4 + 2^{-50}$; $4 + 2 \times 2^{-50}$; $4 + 3 \times 2^{-50}$.
4. Quel est le plus petit nombre $> 1/2$ qui peut être représenté sur un ordinateur 64 bits? Quels sont les 2 suivants?
Réponse : $0.5 + 2^{-53}$; $0.5 + 2 \times 2^{-53}$; $0.5 + 3 \times 2^{-53}$.
5. Combien de nombres entre 1 inclu et 2 exclu peut-on représenter?
Combien entre 2 et 4? Combien entre $1/2$ et 1?
Réponse : chaque fois : exactement 2^{52} .