Lycée Thiers
Année 2016/17

Informatique
MPSI-PCSI

TD14 : Feuille d'Exercices

Recherche de racines d'une fonction.
Recherche de racines par dichotomie.
Méthode de Newton pour la recherche d'une racine de fonction.
Méthode de Babylone pour l'extraction d'une racine carrée.

Exercice 1. *Dichotomie pour la recherche d'une racine de fonctions.*
Soit la fonction

$$f : x \mapsto x^3 - 3x^2 + 1$$

(on pourra la définir par : `f = lambda x:  x**3-2*x**2+1` grâce à l'instruction `lambda`.)

(1) Vérifier que $f(0) = 1 > 0$ et $f(2) = -3 < 0$, et en déduire l'existence d'une solution unique dans $[0, 2]$ à l'équation $f(x) = 0$.
(2) Tracer la courbe représentative de la fonction dans le plan muni d'un repère orthonormé.
(3) Ecrire une fontion `dich_solve()` prenant en paramètre une fonction f, un entier n, des réels (float) `a<b` tels que `f(a)f(b)`< 0 et qui retourne une valeur approchée à 10^{-n} près de la solution. La recherche s'effectuera *par dichotomie sur l'intervalle* `[a,b]`.
(4) Combien de passages dans la boucle `while` sont nécessaires pour obtenir une valeur approchée à 10^{-5} près ? à 10^{-n} près ?
(5) Essayer avec une précision de 10^{-15}, puis de 10^{-16}. Expliquer le comportement obtenu.

Exercice 2. *Une recherche de racine par la méthode de Newton.*
La méthode de Newton permet souvent de déterminer efficacement une valeur approchée de la racine d'une fonction :

Théorème 1. *Si $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est de classe C^1 (dérivable à dérivée continue) et a sur l'intervalle ouvert I une racine r en laquelle $f'(r) \neq 0$, alors si x_0 est suffisamment proche de r, la suite : (x_n) définie par $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ converge vers la racine r.*

(1) Ecrire une fonction `newton(f,df,x,n)` qui retourne la valeur approchée x_n de la racine de f.
(2) On reprend la fonction

$$f : x \mapsto x^3 - 3x^2 + 1$$

de l'Exercice 1 (définie par : `f = lambda x:  x**3-2*x**2+1` grâce à l'instruction `lambda`.)
Retrouver une valeur approchée de la racine de f sur $[0, 2]$ par la méthode de Newton en partant du point $x = 1$. Que se passe-t-il si l'on prend $x = 0$ ou 2 ?

(3) Appliquer la méthode de Newton pour trouver une valeur approchée de la racine à 10^{-5} près. Sous l'hypothèse de monotonie de la fonction, on peut prendre comme

critère d'arrêt :

$$f(u_n - 10^{-5}) \times f(u_n + 10^{-5}) \leqslant 0$$

(4) Comparer les nombres d'itérations pour la recherche d'une racine à 10^{-5} près de f par les deux méthodes de dichotomie et de Newton.

Exercice 3. *Extraction de racine par la méthode de Babylone*

Pour la résolution de $x^2 = a$ où $a > 0$, c'est à dire pour l'extraction de racines carrée cette méthode s'appelle la *méthode de Babylone* ou *Méthode de Héron d'Alexandrie*.

(1) Appliquer la fonction `newton` écrite à l'exercice 1 pour le calcul approché de $\sqrt{2}$ avec plusieurs valeurs du paramètre `n` et comparer le résultat obtenu à la valeur réelle.

(2) Ecrire une fonction `babylone(a,e)` qui retourne une valeur approchée à e près de $\sqrt{a}$. On appliquera la méthode de Newton en prenant comme point initial $u_0 = a$, et on essaiera de trouver un critère d'arrêt adéquat (la fonction $x^2 - a$ n'est monotone que sur $\mathbb{R}^+$).